Classe de seconde, Mathématiques

Professeur Roy Akiki

Mail : royakiki75@hotmail.com

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles : Roy Akiki

Exercice 1 : Soit E un ensemble ayant huit éléments :

$$E = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_7;\ a_8\}$$

Soient A, B, C et D des sous ensembles de l'ensemble E :

$$\begin{aligned} A &= \{a_1;\ a_2;\ a_5;\ a_7\} \\ B &= \{a_2;\ a_3;\ a_5;\ a_8\} \\ C &= \{a_4;\ a_5;\ a_6\} \\ D &= \{a_1;\ a_3;\ a_7\} \end{aligned}$$

a) Déterminer $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $C \cup D$, $A \cup D$ et $B \cup D$.

b) Déterminer $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $C \cap D$, $A \cap D$ et $B \cap D$.

c) Déterminer $(A \cup B) \cup C$ et $(A \cap B) \cap C$.

d) Déterminer $(A \cup B) \cap C$ et $(A \cap B) \cup C$.

e) Déterminer les compléments dans E des ensembles suivants :
A, B, C, D, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $D \cap C$.

f) Déterminer les compléments dans E des ensembles suivants :

$$(A \cup B) \cup C \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap C.$$

Solution :

a) On a $A \cup B = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_5;\ a_7;\ a_8\}$.
$A \cup C = \{a_1;\ a_2;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_7\}$.
$B \cup C = \{a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_8\}$.
$C \cup D = \{a_1;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_7\}$.
$A \cup D = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_5;\ a_7\}$.
$B \cup D = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_5;\ a_7;\ a_8\}$.

b) On a $A \cap B = \{a_2; a_5\}$; $A \cap C = \{a_5\}$; $B \cap C = \{a_5\}$; $C \cap D = \emptyset$; $A \cap D = \{a_1; a_7\}$; $B \cap D = \{a_3\}$.

c) On a $A \cup B = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_5;\ a_7;\ a_8\}$ et $C = \{a_4;\ a_5;\ a_6\}$. Donc

$$(A \cup B) \cup C = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_7;\ a_8\} = E.$$

D'autre part $A \cap B = \{a_2; a_5\}$ et $C = \{a_4;\ a_5;\ a_6\}$. Donc

$$(A \cap B) \cap C = \{a_5\}.$$

d) On a $A \cup B = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_5;\ a_7;\ a_8\}$ et $C = \{a_4;\ a_5;\ a_6\}$. Par suite

$$(A \cup B) \cap C = \{a_5\}.$$

On a $A \cap B = \{a_2; a_5\}$ et $C = \{a_4;\ a_5;\ a_6\}$. Alors

$$(A \cap B) \cup C = \{a_2;\ a_4;\ a_5;\ a_6\}$$

e) On a $A = \{a_1;\ a_2;\ a_5;\ a_7\}$. Donc

$$\overline{A} = \{a_3;\ a_4;\ a_6;\ a_8\}.$$

On a $B = \{a_2;\ a_3;\ a_5;\ a_8\}$. Donc

$$\overline{B} = \{a_1;\ a_4;\ a_6;\ a_7\}.$$

On a $C = \{a_4;\ a_5;\ a_6\}$. Donc

$$\overline{C} = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_7;\ a_8\}.$$

On a $D = \{a_1;\ a_3;\ a_7\}$. Donc

$$\overline{D} = \{a_2;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_8\}.$$

On a $A \cup B = \{a_1;\, a_2;\, a_3;\, a_5;\, a_7;\, a_8\}$. Alors

$$\overline{A \cup B} = \{a_4;\, a_6\}\,.$$

On a $B \cup C = \{a_2;\, a_3;\, a_4;\, a_5;\, a_6;\, a_8\}$. Donc

$$\overline{B \cup C} = \{a_1;\, a_7\}\,.$$

On a $A \cap B = \{a_2; a_5\}$. Donc

$$\overline{A \cap B} = \{a_1;\, a_3;\, a_4;\, a_6;\, a_7;\, a_8\}\,.$$

On a $A \cap C = \{a_5\}$. Donc

$$\overline{A \cap C} = \{a_1;\, a_2; a_3;\, a_4;\, a_6;\, a_7;\, a_8\}\,.$$

On a $B \cap C = \{a_5\}$. Donc

$$\overline{B \cap C} = \{a_1;\, a_2;\, a_3;\, a_4;\, a_6;\, a_7;\, a_8\}\,.$$

On a $D \cap C = \emptyset$. Donc

$$\overline{D \cap C} = \{a_1;\, a_2;\, a_3;\, a_4;\, a_5;\, a_6;\, a_7;\, a_8\}\,.$$

f) On a $(A \cup B) \cup C = \{a_1;\, a_2;\, a_3;\, a_4;\, a_5;\, a_6;\, a_7;\, a_8\}$ .. Donc

$$\overline{(A \cup B) \cup C} = \emptyset.$$

D'autre part $(A \cap B) \cap C = \{a_5\}$. Par suite

$$\overline{(A \cap B) \cap C} = \{a_1;\, a_2;\, a_3;\, a_4;\, a_6;\, a_7;\, a_8\}\,.$$

[a)] Exercice 2 : Soit E l'ensemble des diviseurs de 30 et F l'ensemble des diviseurs de 40.

1. Ecrire E et F en extension et en compréhension.
2. Déterminer les ensembles $E \cup F$ et $E \cap F$

Solution :

a) L'écriture en extension de E est représentée par ce qui suit :

$$E = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 10;\ 15;\ 30\}.$$

L'écriture en extension de F est représentée par ce qui suit :

$$F = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8;\ 10;\ 20;\ 40\}.$$

L'écriture en compréhension de E est donnée par :

$$E = \{x \in \mathbb{N}/\ x \text{ est un diviseur de } 30\}.$$

L'écriture en compréhension de F est donnée par :

$$F = \{x \in \mathbb{N}/\ x \text{ est un diviseur de } 40\}.$$

b) $E \cup F$ est l'ensemble des éléments appartenant à E ou bien à F alors

$$E \cup F = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 10;\ 15;\ 20;\ 30;\ 40\}.$$

$E \cap F$ est l'ensemble des éléments appartenant à E et F à la fois donc

$$E \cap F = \{1;\ 2;\ 5;\ 10\}.$$

Exercice 3 : On considère les ensembles suivants

$$K = \{x \in \mathbb{N}; x < 20\}$$
$$L = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ est pair}\}$$
$$M = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ multiple de } 3\}$$

a) Ecrire K en extension.

b) Déterminer les ensembles $K \cap L$ et $(K \cap L) \cap M$

Solution :

a) Comme $K = \{x \in \mathbb{N};\ x < 20\}$ alors l'écriture de l'ensemble K en extension est donnée par :

$$K = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16;\ 17;\ 18;\ 19;\ 20\}$$

b) L'ensemble L défini en compréhension peut s'écrire en extension sous la manière suivante :

$$L = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18;\ 20......\}$$

Alors l'ensemble d'intersection de K et L est donnée par :

$$K \cap L = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18\}$$

De plus $M = \{0;\ 3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15;\ 18;\ 21;\ 24;\ 27;\ 30;\ 33..........\}$ par suite $(K \cap L) \cap M = \{0;\ 6;\ 12;\ 18\}$.

Exercice 4 : Soient A, B et C trois points d'un même plan (P). On désigne par E l'ensemble des points équidistants des deux points A et B et par F l'ensemble des points équidistants des deux points B et C.

a) Ecrire les ensembles E et F en compréhension.

b) Donner une interprétation géométrique de E et F.

c) Dans quel cas on a $E = F$

d) Dans quel cas on a $E \cap F = \emptyset$.

e) Dans quel cas l'ensemble $E \cap F$ contient un seul élément ?

Solution :

a) L'écriture en compréhension des ensembles E et F est donnée par :

$$E = \{M \in (P) /\ MA = MB\}$$
$$F = \{M \in (P) /\ MB = MC\}$$

b) E représente la médiatrice (d) du segment $[AB]$ dans le plan (P) et F représente la médiatrice (d') du segment $[BC]$ dans le plan (P)

c) Pour que E soit égal à F il faut que le point A soit confondu avec le point C.

d) Si E et F sont disjoints alors (d) et (d') ne se coupent pas donc (d) et (d') sont parallèles par suite les points A, B et C sont alignés.

e) Si $E \cap F$ contient un seul élément alors (d) et (d') se coupent en un seul point, donc A, B et C sont non colinéaires.

Exercice 5 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) $A = \{x \in \mathbb{N} /\ x$ x est un diviseur de 28$\}$

2) $B = \{x \in \mathbb{N}^* /\ x$ est un multiple de 4 et $x < 52\}$

3) $C = \{y \in \mathbb{Z}\ /\ 1 \leq |y| < 5\}$

4) $D = \{x \in \mathbb{Z}\ /\ |x + 3| < 5\}$

5) $E = \{t \in \mathbb{Z} \ / \ |t| \text{ est un diviseur de } 12\}$

Solution :

1) $A = \{1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 14;\ 28\}$

2) $B = \{4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20;\ 24;\ 28;\ 32;\ 36;\ 40;\ 44;\ 48;\ 52\}$

3) On sait que $C = \{y \in \mathbb{Z} \ / \ 1 \leq |y| < 5\}$.
De plus $|y| = 3$ donne $y = 3$ ou $y = -3$; $|y| = 4$ donne $y = 4$ ou $y = -4$; $|y| = 5$ donne $y = 5$ ou $y = -5$.
Par suite $C = \{-5;\ -4;\ -3;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

4) On remarque que

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x+3| < 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -5 < x+3 < 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -8 < x < 2\} \\ &= \{-7;\ -6;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1\} \end{aligned}$$

5) $F = \{-12;\ -6;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$

Exercice 6 : On donne l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \leq 24\}$.
On considère les sous ensembles de E définis par :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in E \ / x \text{ est multiple de } 3\} \\ B &= \{x \in E \ / x \text{ est pair}\} \\ C &= \{x \in E \ / \ |x-4| + 7 < 12\} \end{aligned}$$

1. Ecrire en extension les ensembles A, B et C.
2. Ecrire en extension les ensembles $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$.
3. Comparer $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. Comparer $A \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
6. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.
7. Vérifier que

$$\begin{aligned} card\,(A \cup B \cup C) = {} & card(A) + card(B) + card(C) - card\,(A \cap B) \\ & - card\,(B \cap C) - card\,(A \cap C) \end{aligned}$$

Solution :

1. On a $A = \{x \in E \ / \ x$ est un multiple de $3\}$ ce qui donne son écriture en extension : $A = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24\}$.
   De plus $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24\}$ est l'écriture en extension de l'ensemble B.
   Enfin, on a $C = \{x \in E \ / \ |x-4|+7 < 12\}$ défini en compréhension me permet d'écrire
$$\begin{aligned} C &= \{x \in E \ / \ |x-4| < 5\} \\ &= \{x \in E \ / \ -5 < x-4 < 5\} \\ &= \{x \in E \ / \ -1 < x < 9\} \\ &= \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \end{aligned}$$

2. On a $A \cap B = \{0; 6; 12; 18; 24\}$; $A \cap C = \{0; 3; 6\}$; $B \cap C = \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
   On a $B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24\}$ ce qui donne à la suite :
$$A \cap (B \cup C) = \{0; 3; 6; 12; 18; 24\}\,.$$
   On a $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{0; 3; 6; 12; 18; 24\}$.
   D'autre part $A \cup (B \cap C) = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 18; 21; 24\}$.
   Déterminons $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   En fait $A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; 22; 24\}$.
   De plus $A \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 12; 15; 18; 21; 24\}$.
   Ce qui donne $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 18; 21; 24\}$
   On a $\overline{A} = \{\, 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 13; 14; 16; 17; 19; 20; 22; 23\}$
   $\overline{B} = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23\}$
   Enfin $\overline{C} = \{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24\}$.
3. En comparant les ensembles $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, on remaque que les deux ensembles sont formés des mêmes éléments, il s'ensuit que : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. En comparant les ensembles $A \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, on remaque que les deux ensembles sont formés des mêmes éléments, il s'ensuit que : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. On a $\overline{A \cup B} = \{1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}$
   De même $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}$.
   Il s'ensuit que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

6. On a $\overline{A \cap B} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16;\ 17;\ 19;\ 20;\ 21;\ 22;\ 23\}$.
   De plus $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16;\ 17;\ 19;\ 20;\ 21;\ 22;\ 23\}$.
   On en conclut que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ car ils sont formés des mêmes éléments.
7. On a $A \cup B \cup C = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 12;\ 14;\ 15;\ 16;\ 18;\ 20;\ 21;\ 22;\ 24\}$.
   Par suite $card\,(A \cup B \cup C) = 20$.
   De plus $card(A) = 9$; $card(B) = 13$; $card(C) = 9$; $card(A \cap B) = 5$; $card(A \cap C) = 3$ et $card(B \cap C) = 5$.
   Par ailleurs

$$\begin{aligned}
&card(A) + card(B) + card(C) - card\,(A \cap B) - card\,(A \cap C) \\
&- card\,(B \cap C) + card\,(A \cap B \cap C) \\
&= 9 + 13 + 9 - 5 - 3 - 5 + 2 \\
&= 31 - 5 - 3 - 5 + 2 \\
&= 20
\end{aligned}$$

   Ce qui montre que

$$\begin{aligned}
card\,(A \cup B \cup C) = {} & card(A) + card(B) + card(C) - card\,(A \cap B) \\
& - card\,(A \cap C) - card\,(B \cap C) + card\,(A \cap B \cap C)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 7 :
On donne l'ensemble $E = \{6;\ 8;\ 9;\ 12;\ 16;\ 18;\ 20;\ 21;\ 24;\ 27;\ 28;\ 36;\ 39;\ 48\}$.
On considère les trois sous-ensembles I, J et K de E définis par :

$$\begin{aligned}
I &= \{x \in E \ / \ x = 3t \text{ où } t \in \mathbb{N}\} \\
J &= \{x \in E \ / \ x = 4t \text{ où } t \in \mathbb{N}\} \\
K &= \{x \in E \ / \ x \text{ multiple de } 2\}
\end{aligned}$$

1. Ecrire I, J et K en extension.
2. Déterminer $I \cap J$, $\overline{I \cap \overline{K}}$; $\overline{J} \cap \overline{K}$; $(I \cap J) \cup \overline{K}$; $\quad \overline{I \cap \overline{K}} \cup (J \cap k)$.
3. Comparer $\overline{I} \cup K$ et $\overline{I \cap \overline{K}}$.
4. Déterminer l'ensemble $P(\overline{K})$ des parties de $\overline{K}$.
5. Trouver le cardinal de $P(\overline{K})$ par deux méthodes différentes.
6. Donner une partition de $\overline{K}$ formée de trois sous ensembles de $\overline{K}$

Solution :

1. On a $I = \{x \in E \ / \ x = 3t \text{ où } t \in \mathbb{N}\}$. Donc

$$I = \{6;\ 9;\ 12;\ 18;\ 21;\ 24;\ 27;\ 36;\ 39;\ 48\}$$

$J = \{x \in E \ / \ x = 4t \text{ où } t \in \mathbb{N}\}$. Donc

$$J = \{8;\ 12;\ 16;\ 20;\ 24;\ 28;\ 36;\ 48\}$$

$K = \{x \in E \ / \ x \text{ multiple de } 2\}$. Donc

$$K = \{6;\ 8;\ 12;\ 16;\ 18;\ 20;\ 24;\ 28;\ 36;\ 48\}$$

2. L'intersection des sous ensembles I et J est donnée par :

$$I \cap J = \{12;\ 24;\ 36;\ 48\}$$

On a $\overline{K} = \{9;\ 21;\ 27;\ 39\}$. De plus $I = \{6;\ 9;\ 12;\ 18;\ 21;\ 24;\ 27;\ 36;\ 39;\ 48\}$.
Ce qui donne $I \cap \overline{K} = \{9;\ 21;\ 27;\ 39\}$.
Il s'ensuit que $\overline{I \cap \overline{K}} = \{6;\ 8;\ 12;\ 16;\ 18;\ 20;\ 24;\ 28;\ 36;\ 48\}$.
On a $\overline{J} = \{6;\ 9;\ 18;\ 21;\ 27;\ 39\}$.
Par ailleurs $\overline{K} = \{9;\ 21;\ 27;\ 39\}$ par suite $\overline{J} \cap \overline{K} = \{9;\ 21;\ 27;\ 39\}$.
On a $I \cap J = \{12;\ 24;\ 36;\ 48\}$ et $\overline{K} = \{9;\ 21;\ 27;\ 39\}$ donc

$$(I \cap J) \cup \overline{K} = \{9;\ 12;\ 21;\ 24;\ 27;\ 36;\ 39;\ 48\}$$

On a $\overline{I \cap \overline{K}} = \{6;\ 8;\ 12;\ 16;\ 18;\ 20;\ 24;\ 28;\ 36;\ 48\}$.
De plus $J \cap K = \{8;\ 12;\ 16;\ 20;\ 24;\ 28;\ 36;\ 48\}$. Ainsi

$$\overline{I \cap \overline{K}} \cup (J \cap K) = \{6;\ 8;\ 12;\ 16;\ 18;\ 20;\ 24;\ 28;\ 36;\ 48\}$$

3. Le complémentaire de I dans E est donné par : $\overline{I} = \{8;\ 16;\ 20;\ 28\}$.
En outre $K = \{6;\ 8;\ 12;\ 16;\ 18;\ 20;\ 24;\ 28;\ 36;\ 48\}$. on obtient

$$\overline{I} \cup K = \{6;\ 8;\ 12;\ 16;\ 18;\ 20;\ 24;\ 28;\ 36;\ 48\}$$

En comparant les ensembles $\overline{I \cap \overline{K}}$ et $\overline{I} \cup K$, on remarque que les deux ensembles sont égaux car ils sont formés des mêmes éléments. On en conclut que : $\overline{I} \cup K = \overline{I \cap \overline{K}}$

4. On a $\overline{K} = \{9;\ 21;\ 27;\ 39\}$ alors l'ensemble des parties de $\overline{K}$ est donné par :

$$\begin{aligned} P(\overline{K}) =& \{\emptyset;\ \{9\};\ \{21\};\ \{27\};\ \{39\};\ \{9;21\};\ \{9;27\} \\ & \{9;39\};\ \{21;27\};\ \{21;39\};\ \{27;39\};\ \{9;21;27\}; \\ & \{9;27;39\};\ \{9;21;39\};\ \{21;27;39\}, \overline{K}\} \end{aligned}$$

5. Première méthode pour calculer $card\left(P(\overline{K})\right)$: On a $card(\overline{K}) = 4$ donc $card\left(P(\overline{K})\right) = 2^{card(\overline{K})} = 2^4 = 16$.
   Deuxième méthode : Le cardinal d'un ensemble n'est autre que le nombre d'éléments qui le constitue ce qui donne $card\left(P(\overline{K})\right) = 24$.
6. $\{9;21\}$; $\{27\}$ et $\{39\}$ forment une partition de $\overline{K}$ car leur réunion est égale à $\overline{K}$, ils sont disjoints deux à deux et chacun de ces sous-ensembles est non vide.

Exercice 8 :
Soient les ensembles suivants définis en compréhension :

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ 2x + 4 \geq 0 \text{ et } 3x - 15 \leq 0\} \\ F &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |2x + 1| \leq 3\} \\ G &= \left\{x \in \mathbb{Z} \ / \ (x^2 - 1)(9x^2 - 36) = 0\right\} \end{aligned}$$

1. Ecrire E, F et G en extension.
2. En déduire que F et G sont des sous-ensembles de E.
3. Déterminer $\overline{F \cap \overline{G}}$ et $\overline{F} \cap \overline{G}$.
4. Compléter par $\in$, $\notin$ $\subset$ $\not\subset$
   a. $\{-2; -1\}$............$P(E)$
   b. $\{-2; -1\}$............F
   c. $\{5; 6\}$............$P(E)$
   d. $\{1; 2; 3; 4\}$..........E
   e. $\{-1; 0; 1\}$..........$P(F)$

Solution :

1. On sait que $E = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ 2x + 4 \geq 0 \text{ et } 3x - 15 \leq 0\}$ ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \geq -2 \text{ et } x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -2 \leq x \leq 5\} \\ &= \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\} \ \text{ l'écriture en extension de E} \end{aligned}$$

On a $F = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ \ |2x+1| \leq 3\}$ ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} F &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -3 \leq 2x+1 \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -4 \leq 2x \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -2 \leq x \leq 1\} \\ &= \{-2;\ -1;\ 0;\ 1\} \end{aligned}$$

On a $G = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ (x^2-1)(9x^2-36) = 0\}$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} G &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ 9(x-1)(x+1)(x+2)(x-2) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}/x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 2\} \\ &= \{-2;\ -1;\ 1;\ 2\} \end{aligned}$$

2. On remarque que F est un sous-ensemble de E car tous les éléments de F sont des éléments de E et G est un sous-ensemble de E car tous les éléments de G sont des éléments de E.
3. On a $G = \{-2;\ -1;\ 1;\ 2\}$ alors le complémentaire de G dans E est donné par $\overline{G} = \{0;\ 3;\ 4;\ 5\}$.
   De plus, on a $F = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$, il en résulte $F \cap \overline{G} = \{0\}$ ce qui donne $\overline{F \cap \overline{G}} = \{-2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.
   Pour déterminer $\overline{F} \cap \overline{G}$, on remarque que $F = [-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$ ce qui donne $\overline{F} = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.
   De plus on a $\overline{G} = \{0;\ 3;\ 4;\ 5\}$ ce qui induit $\overline{F} \cap \overline{G} = \{3;\ 4;\ 5\}$.
4. a. $\{-2; -1\} \in P(E)$
   b. $\{-2; -1\} \subset F$
   c. $\{5; 6\} \notin P(E)$
   d. $\{1; 2; 3; 4\} \subset E$
   e. $\{-1; 0; 1\} \in P(F)$

Exercice 9 :
On donne l'ensemble $E = \{t;\ 1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 13\}$ et les deux sous-ensembles : $I = \{t;\ 1;\ 5;\ 7\}$; et $J = \{1;\ 5;\ 9;\ 13\}$

1. Déterminer $\overline{I \cap J}$ et $\overline{I} \cup \overline{J}$. Que peut-on déduire ?
2. Déterminer $\overline{I \cup J}$ et $\overline{I} \cap \overline{J}$. Que peut-on déduire ?

Solution :

1. On a $I \cap J = \{1; 5\}$. Donc $\overline{I \cap J} = \{t;\ 3;\ 7;\ 9;\ 13\}$.
   On a $\overline{I} = \{3;\ 9;\ 13\}$ et $\overline{J} = \{t;\ 3;\ 7\}$ ce qui donne $\overline{I} \cup \overline{J} = \{t;\ 3;\ 7;\ 9;\ 13\}$.
   On en conclut que $\overline{I \cap J} = \overline{I} \cup \overline{J}$.
2. On a $I \cup J = \{t;\ 1;\ 5;\ 7;\ 9;\ 13\}$ alors $\overline{I \cup J} = \{3\}$.
   De même $\overline{I} \cap \overline{J} = \{3\}$. On en conclut que $\overline{I \cup J} = \overline{I} \cap \overline{J}$.

Exercice 10 : Les parties 1, 2 ,3 et 4 sont indépendantes.

1. Dans un groupe de 400 élèves, 250 parlent le Francais et 200 parlent l'Anglais. Combien d'élèves peuvent parler à la fois l'Anglais et le Francais ?
2. Si S et T sont deux ensembles tel que S renferme 21 éléments, T possède 32 éléments et $S \cap T$ contient 11 éléments. Combien d'éléments renferme $S \cup T$?
3. Détermine l'union et l'intersection des ensembles suivants :
$$A = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ est un diviseur de } 12\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ est un multiple de 4 inférieur ou égal à } 16\}$$
4. On donne l'ensemble de référence $E = \{x \in \mathbb{N}\ /14 \leq x \leq 27\}$.
   On considère les deux sous ensembles de E définis par :
$$A = \{x \in E;\ x \text{ est pair}\}$$
$$B = \{x \in E;\ x \text{ est un carré parfait}\}$$
   Trouver le complément de l'union des ensembles A et B et le complément de leur intersecion.

Solution :

1. Soit H l'ensemble des élèves qui parlent le Francais et E l'ensemble des élèves qui parlent l'Anglais.
   On a $card(H \cup E) = 400;\ card(H) = 250$ et $card(E) = 200$.
   Par ailleurs $card(H \cup E) = card(H) + card(E) - card(H \cap E)$, il s'ensuit que :
$$400 = 250 + 200 - card(H \cap E)$$
$$400 = 450 - card(H \cap E)$$
$$card(H \cap E) = 450 - 400 = 50$$
   Par suite, il y a 50 d'élèves qui peuvent parler à la fois l'Anglais et le Francais à la fois.

2. On a $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$ et $B = \{0;\ 4;\ 8;\ 12;\ 16\}$.
   Il en résulte que $A \cup B = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12;\ 16\}$ et de plus $A \cap B = \{4;\ 12\}$
3. On a $card(S) = 21$; $card(T) = 32$ et $card(S \cap T) = 11$.
   D'autre part, on sait que $card(S \cup T) = card(S) + card(T) - card(S \cap T)$ ce qui donne $card(S \cup T) = 21 + 32 - 11 = 42$, par suite l'ensemble $S \cup T$ contient 42 éléments.
4. On sait que $E = \{x \in \mathbb{N}/\ 14 \leq x \leq 27\}$.
   Donc $E = \{14;\ 15;\ 16;\ 17;\ 18;\ 19;\ 20;\ 21;\ 22;\ 23;\ 24;\ 25;\ 26;\ 27\}$.
   D'autre part, on a :
   $$A = \{x \in E;\ x \text{ est pair}\} = \{14;\ 16;\ 18;\ 20;\ 22;\ 24;\ 26\}$$
   Egalement, on a :
   $$B = \{x \in E;\ x \text{ est un carré parfait}\} = \{16; 25\}$$
   Il s'ensuit que $A \cup B = \{14;\ 16;\ 18; 20;\ 22;\ 24;\ 25;\ 26\}$ ce qui donne :
   $$\overline{A \cup B} = \{15;\ 17;\ 19;\ 21;\ 23;\ 27\}$$
   Enfin, on a $A \cap B = \{16\}$, il en résulte que :
   $$\overline{A \cap B} = \{14; , 15;\ 17;\ 18;\ 19;\ 20;\ 21;\ 22;\ 23;\ 24;\ 25;\ 26;\ 27\}$$

Exercice 11 :On considère les ensembles suivants :

$$E = \{x \in \mathbb{N};\ x < 15\}$$
$$A = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ est un multiple de } 4 \text{ inférieur à } 15\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ est divisible par 3 et inférieur à } 15\}$$

1. Ecrire A, B et E en extension
2. En déduire que A, B sont des sous ensembles de E.
3. Ecrire en extension les ensembles suivants : $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$
4. Comparer les ensembles $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$

Solution :

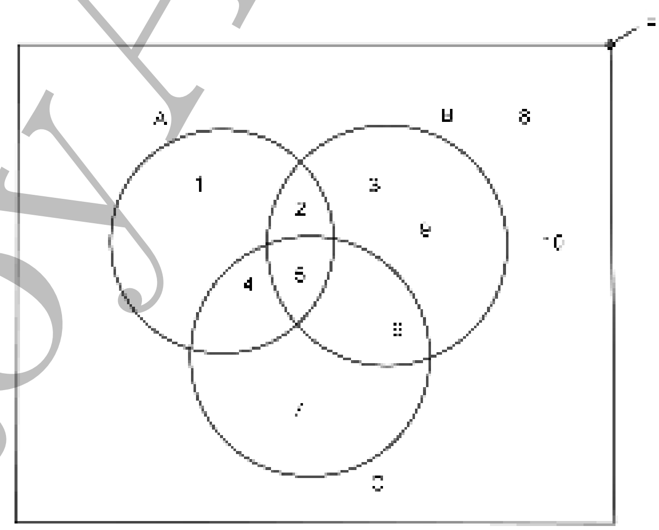
1. On a $E = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14\}$.
   De plus $A = \{0;\ 4;\ 8;\ 12\}$ et $B = \{0;\ 3;\ 6;\ 9;\ 12\}$.

2. On remarque que tous les éléments de A sont des éléments de E et tous les éléments dee B sont des éléments de E. Donc A et B sont des sous ensembles de E.

3. On a $A \cup B = \{0;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12\}$. et $A \cap B = \{0;\ 12\}$.
   Il en résulte que $\overline{A \cup B} = \{1;\ 2;\ 5;\ 7;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14\}$.
   De même $\overline{A \cap B} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14\}$.
   D'autre part $\overline{A} = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 7;\ 9;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14\}$
   et $\overline{B} = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14\}$
   Il en résulte que que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1;\ 2;\ 5;\ 7;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14\}$.
   De même $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14\}$

4. On a $\overline{A \cup B} = \{1;\ 2;\ 5;\ 7;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14\}$.
   En outre $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1;\ 2;\ 5;\ 7;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14\}$.
   Il s'ensuit que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ car ils sont formés des mêmes éléments.

Exercice 12 : Le diagramme ci-dessous représente les ensembles E, A, B et C où E représente l'ensemble de référence.



1. Ecrire les ensembles E, A, B et C en extension.
2. Déterminer $A \cap B$, $A \cap C$ et $A \cup B$.
3. Détermine et compare les 2 ensembles suivants $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

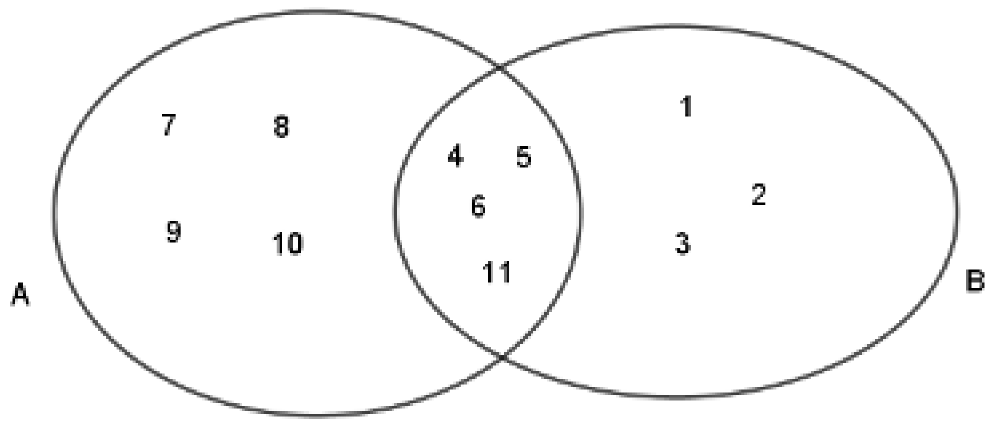
4. Ecrire en extension les ensembles $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$.
5. Ecrire en extension $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$. En tirer une conclusion.
6. Peut-on trouver le complémentaire de C dans A ? Justifier votre réponse.
7. Compléter les pointillés avec le symbole convenable :
   $2,5$............$\mathbb{N}$, $\sqrt{2}$..................$\mathbb{R}$
   -5.............$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$................$\mathbb{N}$
   $\mathbb{Q}$.............$\mathbb{R}$

Solution :

1. On a $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
   $A = \{1; 2; 4; 5\}$, $B = \{2; 3; 5; 6; 9\}$ et $C = \{4; 5; 6; 7\}$
2. On a $A \cap B = \{2; 5\}$, $A \cap C = \{4; 5\}$
   De même $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$.
3. On a $B \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$ et $A = \{1; 2; 4; 5\}$. Il en résulte que $A \cap (B \cup C) = \{2; 4; 5\}$.
   D'autre part, on a $A \cap B = \{2; 5\}$ et $A \cap C = \{4; 5\}$.
   Alors on obtient $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2; 4; 5\}$.
   On conclut que $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$.
4. On a $A = \{1; 2; 4; 5\}$ donc $\overline{A} = \{3; 6; 7; 8; 9; 10\}$.
   De plus, on a $B = \{2; 3; 5; 6; 9\}$ donc $\overline{B} = \{1; 4; 7; 8; 10\}$.
   Enfin, on a $C = \{4; 5; 6; 7\}$ donc $\overline{C} = \{1; 2; 3; 8; 9; 10\}$.
5. On a $A \cap B = \{2; 5\}$ donc $\overline{A \cap B} = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10\}$.
   D'autre part, on a $\overline{A} = \{3; 6; 7; 8; 9; 10\}$ et $\overline{B} = \{1; 4; 7; 8; 10\}$.
   Il en résulte que $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10\}$.
   On pourra conclure que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ car ces deux ensembles sont formés des mêmes éléments.
6. Non, on ne peut pas trouver le complémentaire de C dans A car C n'est pas inclus dans A.
7. $2,5 \notin \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $-5 \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exercice 13 : Soient A et B 2 parties d'un ensemble non vide E vérifiant les conditions suivantes :
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$, $A \cap B = \{4; 5; 6; 11\}$ et $A - B = A \cap \overline{B} = \{7; 8; 9; 10\}$.
Déterminer A et B en extension.

Solution :
En utilisant le diagramme de Venn, on pourra déterminer l'écriture en extension des ensembles A et B.



On retrouve $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$
De même $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 11\}$.

Exercice 14 : Déterminer l'ensemble A défini en compréhension par :

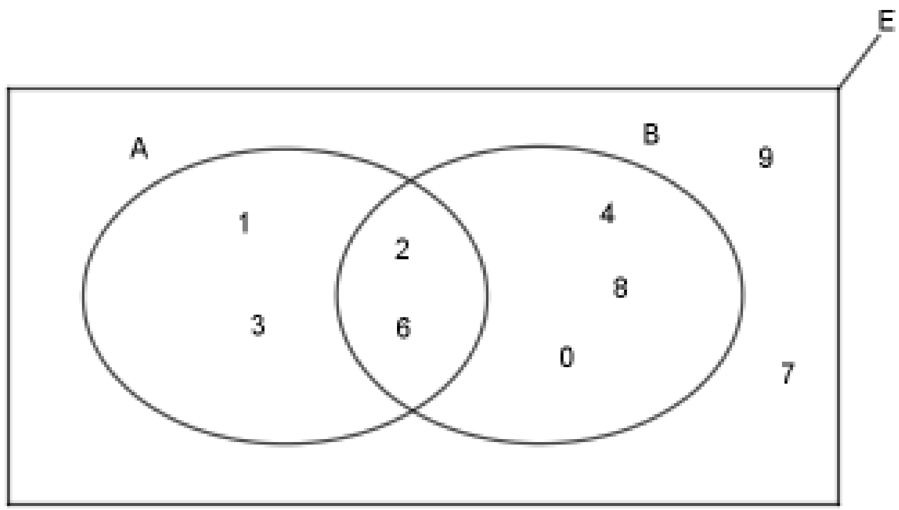
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{x-1}{x+1} \geq \frac{1}{2}\right\}$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
&\frac{x-1}{x+1} \geq \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \ \frac{2x-2-x-1}{2(x+1)} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{x-3}{2(x+1)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \ (x-3 \geq 0 \text{ et } x+1 > 0) \ \text{ ou } \ (x-3 \leq 0 \text{ et } x+1 < 0) \\
&\Leftrightarrow \ (x \geq 3 \text{ et } x > -1) \ \text{ ou } \ (x \leq 3 \text{ et } x < -1) \\
&\Leftrightarrow \ (x \in [3; +\infty[\text{ et } x \in]-1; +\infty[) \ \text{ ou } \ (x \in]-\infty; 3] \text{ et } x \in]-\infty; -1[) \\
&\Leftrightarrow \ (x \in [3; +\infty[\cap]-1; +\infty[) \ \text{ ou } \ (x \in]-\infty; 3] \cap]-\infty; -1[) \\
&\Leftrightarrow \ x \in [3; +\infty[\text{ ou } x \in]-\infty; -1[\\
&\Leftrightarrow \ x \in]-\infty; -1[\cup [3; +\infty[
\end{aligned}$$

Par suite $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \in]-\infty; -1[\cup [3; +\infty[\}$

Exercice 15 : En utilisant le diagramme ci-dessous :



1. Ecrire les ensembles A, B et E en extension.
2. Ecrire les ensembles A et B en compréhension.
3. Ecrire en extension $\overline{A}, \overline{B}, A \cap B, A \cup B, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cup B}$.
4. Trouver le cardinal de $P(A)$ puis $P(A)$.

Solution :

1. On a $A = \{1; 2; 3; 6\}$, $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
   Enfin $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
2. Les écritures en compréhension de A et B sont données par :
   $A = \{x \in E \ / \ x \text{ est un diviseur de } 6\}$.
   De même $B = \{x \in E \ / \ x \text{ est pair}\}$
3. On a $\overline{A} = \{0; 4; 5; 7; 8; 9\}$ et $\overline{B} = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
   De plus $A \cap B = \{2; 6\}$ et $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$.
   Pour déterminer $\overline{A} \cap B$, on remarque que $\overline{A} = \{0; 4; 5; 7; 8; 9\}$ et de plus $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Ce qui donne $\overline{A} \cap B = \{0; 4; 8\}$.
   Pour déterminer $\overline{A} \cap \overline{B}$, on remarque que $\overline{A} = \{0; 4; 5; 7; 8; 9\}$ et de plus $\overline{B} = \{1; 3; 5; 7; 8\}$. Ce qui donne $\overline{A} \cap \overline{B} = \{5; 7; 9\}$.
   Enfin, pour déterminer $\overline{A \cup B}$, on remarque que $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$, il en résulte que : $\overline{A \cup B} = \{5; 7; 9\}$.

4. On a $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$ donc $card(A) =$ nombre des éléments de A $= 4$.
   Par ailleurs $card\,(P(A)) = 2^{card(A)}$ ainsi on obtient $card\,(P(A)) = 2^4 = 16$.
   Déterminons maintenant $P(A)$ l'ensemble des parties de A.

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) = &\{\emptyset;\ \{1\};\ \{2\};\ \{3\};\ \{6\};\ \{1;2\};\ \{1;3\} \\ &\{1;6\};\ \{2;3\};\ \{2;6\};\ \{3;6\};\ \{1;2;3\}; \\ &\{1;2;6\};\ \{1;3;6\};\ \{2;3;6\}, A\} \end{aligned}$$

Exercice 16 : Répondre par Vrai oi Faux. Justifier votre réponse.

a. $1,\overline{5}$ est un nombre irrationnel.

b. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^*$.

c. $\dfrac{2}{5} \in \mathbb{D}$.

d. $card\,(P(\emptyset)) = 0$

e. $\overline{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des nombres irrationnels.

f. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $x^2 - 5 = 0$ est $A = \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$.

Solution :

a. Faux, $1,\overline{5}$ est un nombre rationnel car c'est un nombre illimité periodique.

b. Faux car $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \notin \mathbb{Z}^*$.

c. Faux car $\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0,4$

d. Faux car $card\,(P(\emptyset)) = 2^{card(\emptyset)} = 2^0 = 1$.

e. Vrai $\overline{Q}$ est l'ensemble des nombres irrationnels.

f. Faux car l'équation $x^2 - 5 = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$, elle possède 2 solutions dans $\mathbb{R}$: $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$

Exercice 17 : Les questions A, B et C sont indépendantes. A) Déterminer x et y dans les cas suivants :

1. $\{1;\ 2;\ x+1;\ 6\} = \{4;\ 2;\ 1;\ y\}$
2. $\{3;\ x;\ 6;\ 20;\ 14\} \cap \{5;\ 6;\ 20;\ 10\} = \{y;\ 6;\ 10\}$
3. $\{11;\ 12;\ 13;\ 14\} \cup \{x;\ 12;\ 15\} = \{y;\ 12;\ 6;\ 11;\ 13;\ 14\}$

B) Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$:

$\emptyset$........... $\{3;\, 4\}$

$\{-1;\, 1\}$ ....$\mathbb{Z}^*$

$\dfrac{2}{3}$...........$\mathbb{N}^*$

$\{2\}$ .... $\{1;\, 2\}$

$\mathbb{N}$.............$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^*$

$\left\{-2;\, 7;\, \sqrt{9}\right\}$ ....$\mathbb{Z}$

$\sqrt{2}$...........$\mathbb{R}$

1........... $\{-1;\, 1\}$

$\mathbb{Q}$.............$\mathbb{R}^*$

$\{1;\, 2;\, 3;\, 4\}$ .... $\{2;\, 3;\, 4\}$

$\emptyset$..........$P(\emptyset)$

$\{1;\, 2\}$ ....$\mathbb{R}$

C) Soit A un sous ensemble de E, on note par $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Déterminer les sous ensembles suivants :

a. $(A \cup E) \cap \overline{A}$

b. $\left(A \cup \overline{A}\right) \cap \emptyset$

c. $\left(E \cap \overline{A}\right) \cup \left(\overline{E} \cup A\right)$

Solution : A)

a. $\{1;\, 2;\, x+1;\, 6\} = \{4;\, 2;\, 1;\, y\}$.
On sait que ces deux ensembles sont égaux s'ils sont formés des mêmes éléments. Alors $x + 1 = 4$ soit $x = 3$ et $y = 6$.

b. On a $\{3;\, x;\, 6;\, 20;\, 14\} \cap \{5;\, 6;\, 20;\, 10\} = \{y;\, 6;\, 10\}$. Alors x doit être nécessairement égal à 10 et y doit être nécessairement égal à 20.

c. On a $\{11;\, 12;\, 13;\, 14\} \cup \{x;\, 12;\, 15\} = \{y;\, 12;\, 6;\, 11;\, 13;\, 14\}$ donne $x = 6$ et $y = 5$

B)

$$\begin{array}{rl}
\emptyset \subset \{3;\, 4\} & \sqrt{2} \in \mathbb{R} \\
\{-1;\, 1\} \subset \mathbb{Z}^* & 1 \in \{-1;\, 1\} \\
\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{N}^* & \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}^* \\
\{2\} \subset \{1;\, 2\} & \{1;\, 2;\, 3;\, 4\} \not\subset \{2;\, 3;\, 4\} \\
\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^* & \emptyset \in P(\emptyset) \\
\left\{-2;\, 7;\, \sqrt{9}\right\} \subset \mathbb{Z} & \{1;\, 2\}\,. \subset \mathbb{R}
\end{array}$$

C)

1. On a $(A \cup E) \cap \overline{A} = E \cap \overline{A} = \overline{A}$
2. $\left(A \cup \overline{A}\right) \cap \emptyset = E \cap \emptyset = \emptyset$
3. $\left(E \cap \overline{A}\right) \cup \left(\overline{E} \cup A\right) = \overline{A} \cup (\emptyset \cup A) = \overline{A} \cup A = E$

Exercice 18 : Ecrire les ensembles suivants en extension et déterminer le cardinal de chaque ensemble.

1. $A = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ est impair et } n \leq 25\}$
2. $B = \{n \in \mathbb{N};\ 10 \leq n < 19\}$
3. $C = \{n \in \mathbb{Z};\ |n+2| < 3\}$
4. $D = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ est pair et } 81 < n < 103\}$
5. $E = \{n \in \mathbb{N};\ 100 < n < 119 \text{ et } n \text{ multiple de } 3\}$
6. $F = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq 10 \text{ et } n \leq 15\}$
7. $G = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ divise } 72\}$
8. $H = \left\{n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=1}^{n} 2^k < 511\right\}$
9. $I = \left\{n \in \mathbb{N};\ \dfrac{n+4}{n-4} \in \mathbb{Z}\right\}$

Solution :

1. $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23\}$ Alors $card(A) = 13$.
2. $B = \{10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18\}$ alors $card(B) = 9$.
3. On a
$$\begin{aligned} C &= \{n \in \mathbb{Z};\ |n+2| < 3\} = \{n \in \mathbb{Z};\ -3 < n+2 < 3\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z};\ -5 < n < 1\} = \{-4; -3; -2; -1; 0\} \end{aligned}$$
Ce qui donne $card(C) =$ nombre d'éléments de $C = 5$
4. On a
$$\begin{aligned} D &= \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ est pair et } 81 < n < 103\} \\ &= \{82; 84; 86; 88; 90; 92; 94; 96; 98; 100; 102\} \end{aligned}$$
Par suite $card(D) =$ nombre d'éléments de $D = 11$

5. On a $E = \{n \in \mathbb{N};\ 100 < n < 119 \text{ et } n \text{ multiple de } 3\}$.
   Donc $E = \{102;\ 105;\ 108;\ 111;\ 114;\ 117\}$.
   Par suite $card(E) =$ nombre d'éléments de $E = 6$.
6. On a $F = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq 10 \text{ et } n \leq 15\} = \{10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15\}$.
   Par suite $card(F) =$ nombre d'éléments de $F = 6$.
7. On a $G = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ divise } 72\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12;\ 24;\ 36;\ 72\}$
   Ce qui donne $card(G) =$ nombre d'éléments de $G = 11$.
8. On a $H = \left\{n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=1}^{n} 2^k < 511\right\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$. Il s'ensuit que $card(H) =$ nombre d'éléments de $H = 8$.
9. On a

   $$\frac{n+4}{n-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n-4+8}{n-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 + \frac{8}{n-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n-4 \text{ divise } 8$$
   $$\Leftrightarrow n-4 = \pm 1 \text{ ou } n-4 = \pm 2 \text{ ou } n-4 = \pm 4 \text{ ou } n-4 = \pm 8$$
   $$\Leftrightarrow n = 5 \text{ ou } n = 3 \text{ ou } n = 6 \text{ ou } n = 2 \text{ ou } n = 8 \text{ ou } n = 0 \text{ ou } n = 12 \text{ ou } n = -4$$

   Alors $I = \{-4;\ 0;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 8;\ 12\}$ et $card(I) = 8$.

Exercice 19 : Une enquête portant sur trois langues vivantes (anglais, espagnol et russe) auprès d'étudiants a donné les résultats suivants :

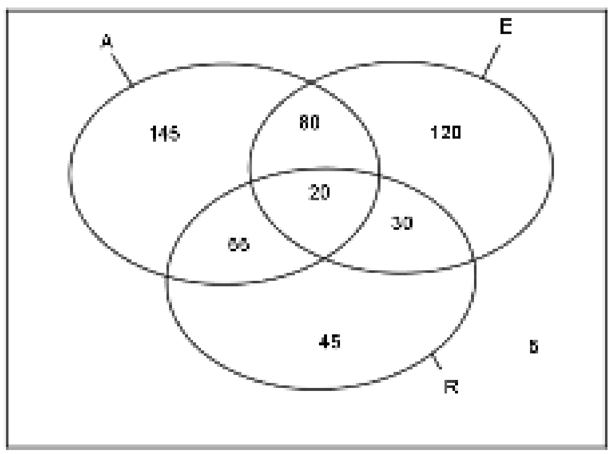
- 300 étudiants parlent au moins l'anglais.
- 250 étudiants parlent au moins l'espagnol.
- 150 étudiants parlent au moins le russe.
- 100 étudiants parlent au moins l'anglais et l'espagnol.
- 75 étudiants parlent au moins l'anglais et le russe.
- 50 étudiants parlent au moins l'espagnol et le russe.
- 20 étudiants parlent les trois langues vivantes.
- 5 étudiants ne parlent aucune des trois langues.

1. Construire un diagramme de Venn représentant cette situation (aucune justification demandée).
2. Déterminer le nombre d'étudiants interrogés dans cette enquête.
3. a. Quel est le nombre d'étudiants qui parlent l'anglais et le russe mais pas l'espagnol ?

   b. Quel est le nombre d'étudiants qui parlent au moins une des trois langues vivantes ?
   c. Quel est le nombre d'étudiants qui parlent en même temps l'anglais et le russe ?
4. Combien d'étudiants parlent exactemnent une langue étrangère ?

Solution :

1. On désigne par A l'ensemble des étudaints qui parlent l'Anglais , E l'ensemble des étudiants qui parlent l'espagnol et R l'ensmeble des élèves qui parlent le russe. Alors le diagramme de Venn représentant la situation est donné par ce qui suit :



2. On calcule $145 + 80 + 20 + 55 + 30 + 120 + 45 = 500$. Alors il y a 500 étudiants interrogés par cette enquête.
3. a. D'après le diagramme de Venn établi, 55 étudiants parlent l'anglais et le russe mais pas l'espagnol.
   b. Comme il y a 500 étudiants interrogés par cette enquête et 5 étudiants ne parlent aucune des trois langues vivantes. En calculant $500-5 = 495$ on trouve que 495 étudiants parlent au moins une des trois langues vivantes.
   c. D'après le diagramme de Venn établi, 75 étudiants parlent l'anglais et le russe en même temps.
4. On a 120 étudiants qui parlent uniquement l'espagnol, 145 étudiants qui parlent uniquement l'Anglais et 45 étudiants parlent uniquement le Russe.

En calculant $120 + 145 + 45 = 310$, on trouve que 310 étudiants parlent exactement une langue étrangère.

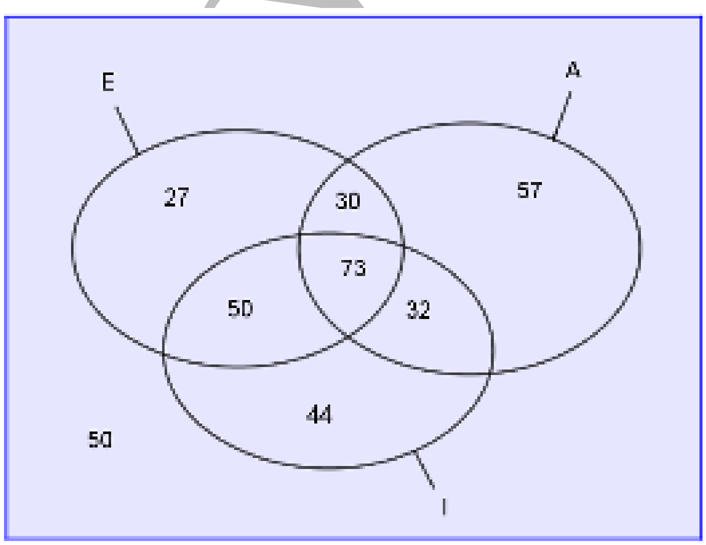
Exercice 20 : Lors d'une étude sur les voyages des élèves en Europe, 363 ont été interrogés sur leur voyage en Espagne, Angleterre et Italie.

- 180 élèves ont séjourné en Espagne, 192 en Angleterre et 199 en Italie.
- 103 élèves ont au moins séjourné en Espagne et en Angleterre.
- 105 au moins en Italie et en Angleterre et 123 au moins en Italie et en Espagne.
- 73 élèves ont séjourné dans les trois pays.

1. Construire un diagramme de Venn décrivant la situation.
2. Détermine le nombre d'élèves
   a. qui ont séjourné uniquement en Espagne.
   b. qui ont séjourné uniquement en Italie et en Angleterre.
   c. qui ont séjourné dans aucun des trois pays.

Solution :

1. On désigne par E l'ensemble des élèves qui ont séjouré en Espagne, A l'ensemble des élèves qui ont séjourné en Angleterre et I l'ensmeble des élèves qui ont séjourné en Italie. On obtient alors le diagramme de Venn suivant :



2. a. D'après le diagramme de Venn, on remarque que 27 élèves ont séjourné uniquement en Espagne.
   b. On remarque également qu'il y a 32 élèves qui ont séjourné uniquement en Italie et Angleterre.
   c. En calculant $363-(27+30+73+50+57+32+44)=363-313=50$. On trouve qu'il y a 50 élèves qui n'ont séjourné dans aucun des trois pays.

Exercice 21 :

1. Définir les ensembles suivants en extension :
   a. $A=\{x\in\mathbb{Z};\ 10\leq x\leq 17\}$
   b. $B=\{x\in\mathbb{Z};\ x^2\leq 24\}$
   c. $C=\{x\in\mathbb{Z};\ 6x^2+x-1=0\}$.
      (Indice : $6x^2+x-1=(3x-1)(2x+1)$)
   d. $D=\{x\in\mathbb{R};\ 6x^2+x-1=0\}$
2. Définir les ensembles suivants en compréhension :
   a. $E=\{1;\ 2;\ 7;\ 14\}$
   b. $F=\{2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ 17........\}$
   c. $G=\left\{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32}...........\right\}$

Solution :

1. a. $A=\{10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16;\ 17\}$
   b. $B=\{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$
   c. On a
   $$\begin{aligned} 6x^2+x-1=0 &\Leftrightarrow (3x-1)(2x+1)=0\\ &\Leftrightarrow 3x-1=0 \text{ ou } 2x+1=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ ou } x=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$
   On remarque que $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ ne sont pas des entier relatifs alors $C=\emptyset$.
   d. D'après la question précédente, on a $D=\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right\}$
2. On va écrire les ensembles E, F et G en compréhension.

a. $E = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ est un diviseur de } 14\}$

b. $F = \{3n + 2;\ n \in \mathbb{N}\}$

c. $G = \left\{\dfrac{1}{2^n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 22 : On note $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
On considère les deux sous ensembles de E suivants :
$A = \{0; 2; 3; 5; 8\}$ et $B = \{2; 3; 4; 5; 6; 9\}$.
Détermine les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ $A - B$, et $B - A$.
Solution :
On rappelle que la différence de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A mais n'appartenant pas à B. On la note par $A - B$
On a $A = \{0; 2; 3; 5; 8\}$ et $B = \{2; 3; 4; 5; 6; 9\}$. Donc $A \cap B = \{2; 3; 5\}$.
De plus, on obtient $A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$.
Le complémentaire de A dans E est donné par $\overline{A} = \{1; 4; 6; 7; 9\}$.
Le complémentaire de B dans E est donné par $\overline{B} = \{0; 1; 7; 8\}$
Enfin $A - B = \{0; 8\}$ et $B - A = \{4; 6; 9\}$.

Exercice 23 : Les 28 élèves d'une classe jouent tous au moins un des instruments de musique : violon, guitare, piano.

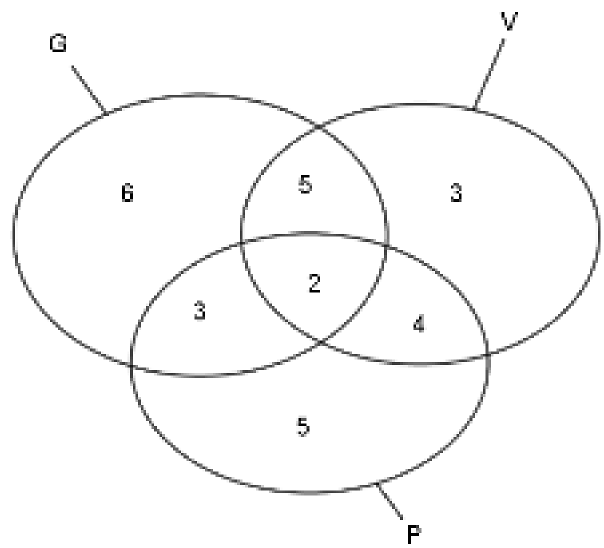
- 16 élèves jouent de la guitare.
- 5 élèves jouent du piano seulement.
- 6 élèves jouent du piano et du violon.
- 3 élèves jouent de la guitare et du piano seulement.
- 12 élèves jouent 2 instruments.
- 2 élèves jouent les trois instruments.

a. Combien d'élèves jouent du violon et de la guitare ?

b. Combien d'élèves ne jouent pas au piano ?

Solution :

1. On désigne par G l'ensmble des élèves qui jouent du Piano, P l'ensemble des élèves qui jouent du piano et V l'ensmeble des élèves quI jouent du violon . On obtient le diagramme de de Venn suivant à la suite des informations données :



D'après le diagramme de Venn, on retrouve que 7 élèves jouent du violon et de la guitare.

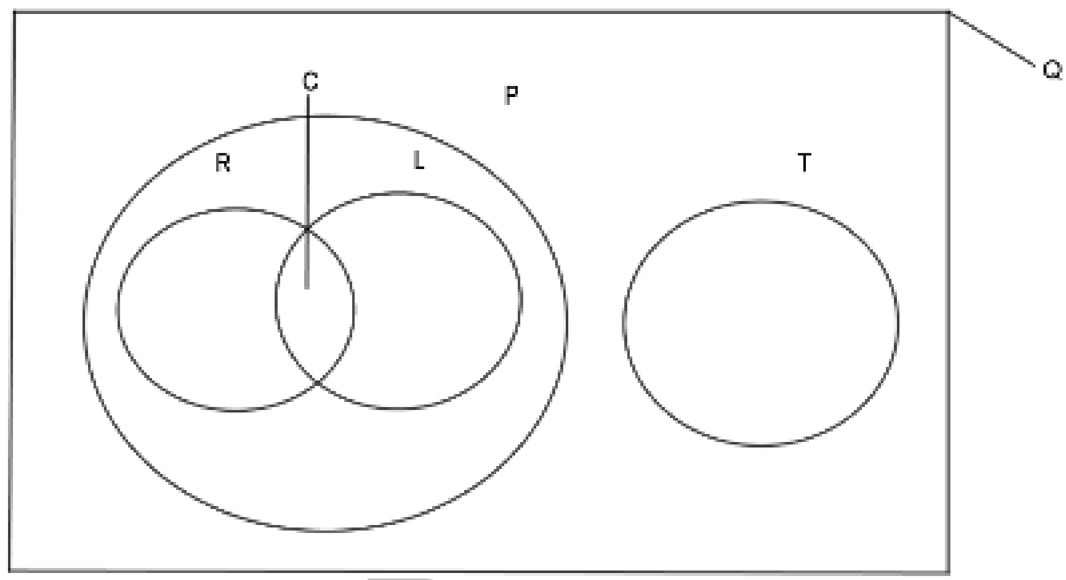
2. 12 élèves ne jouent pas au piano (on calcule $6+5+3=14$ pour répondre à la question).

Exercice 24 : Soit C l'ensemble des carrés, L l'ensmeble des losanges, P l'ensemble des parallélogrammes, R l'ensmeble des rectangles, T l'ensmeble des trapèzes, Q l'ensemble des quadrilatères.

1. Ecrivez toutes les inclusions possibles entre ces ensembles.
2. Que peut-on dire de $L \cap R$? Justifier.
3. Représentez tous ces ensembles sur un même diagramme.

Solution :

1. Les inclusions possibles entre ces ensembles sont :
   $C \subset Q$, $L \subset Q$, $P \subset Q$, $R \subset Q$, $T \subset Q$, $C \subset P$, $L \subset P$, $R \subset P$, $C \subset R$, $C \subset L$
2. On peut dire que l'ensemble $L \cap R$ est égal à C car tout carré est à la fois rectangle et losange.
3. On représente les ensembles notés dans la donnée par le diagramme de Venn ci-dessous :


C
P
R
L
T
Q

Chapitre 2

Droites dans un repère : Roy Akiki

Exercice 1 :
Donner une représentation paramétrique de la droite (D) définie par les conditions suivantes :

a) (D) passe par $A(2;-3)$ et a comme vecteur directeur $\overrightarrow{V}(-3;2)$

b) (D) passe par les points $A(-3;4)$ et $B(4;-1)$.

c) (D) passe par $A(3;-2)$ et a pour coefficient directeur $m=\frac{-2}{3}$.

Solution :
a) $M(x;y)$ un point quelconque de (D) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires soit $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ où t est un paramètre réel avec $\overrightarrow{AM}(x-2;\ y+3)$ et $\overrightarrow{V}(-3;2)$ donc $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x &= -3t+2 \\ y &= 2t-3 \end{cases}$

b) $M(x;y)$ un point quelconque de (D) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires soit $\overrightarrow{AM} = l\,\overrightarrow{AB}$ où l est un paramètre réel avec $\overrightarrow{AM}(x+3;\ y-4)$ et $\overrightarrow{AB}(7;-5)$ donc $\begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x &= 7l-3 \\ y &= -5l+4 \end{cases}$

c) L'équation de la droite (D) est de la forme $y-y_A = m(x-x_A)$ avec $m=\frac{-2}{3}$ ce qui donne $y+2=\frac{-2}{3}(x-3)$ soit $2x+3y=0$ par suite le vecteur directeur de (D) est $\overrightarrow{V}(-3;2)$.
$M(x;y)$ un point quelconque de (D) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires soit $\overrightarrow{AM} = m\,\overrightarrow{V}$ où m est un paramètre réel avec

$\overrightarrow{AM}(x-3;\ y+2)$ et $\overrightarrow{V}(-3;2)$ donc $\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x & = & -3m+3 \\ y & = & 2m-2 \end{cases}$

Exercice 2 :
On considère la famille des droites (d_m) d'équation : $(m-1)x-2y+m-3=0$

a) Montrer que les droites de la famille (d_m) concourent en un même point.

b) Déterminer la droite de la famille qui passe par

1. L'origine $O(0;0)$
2. Le point $B(1;0)$

c) Déterminer la droite de la famille dont un vecteur directeur est $(1;-1)$

d) Déterminer la droite de la famille de coefficient directeur $\frac{-1}{2}$

Solution

a) Soit $F(a;b)$ un point fixe de (d_m) alors $(m-1)a-2b+m-3=0$ ce qui donne $ma-a-2b+m-3=0$ soit $m(a+1)-a-2b-3=0$. Ce polynome est identiquement nul alors il faut que tous les coefficients soient nuls alors $\begin{cases} a+1 & = & 0\ (1) \\ -a-2b-3 & = & 0\ (2) \end{cases}$.
L'équation (1) donne $a=-1$. En remplacant a par sa valeur dans l'équation (2) on obtient $-2b-2=0$ soit $b=-1$, par suite les droites de la famille (d_m) concourent en un même point $F(-1;-1)$

b) 1) $O(0;0)$ appartient à (dm) alors $W=0$ ce qui donne $m-3=0$ soit $m=3$, par suite la droite de la famille qui passe par le point $O(0;0)$ est la droite (d_3) d'équation $2x-2y=0$ soit $y=x$

2) $B(1;0)$ appartient à (d_m) alors $(m-1)(1)-2\times 0+m-3=0$ ce qui donne $m-1+m-3=0$ ainsi $2m-4=0$ soit $m=2$, par suite la droite de la famille qui passe par le point $B(1;0)$ est la droite (d_2) d'équation $x-2y-1=0$

c) On a $\overrightarrow{u}(1;-1)$ est un vecteur directeur de (d_m) et $\overrightarrow{V}_{(d_m)}(2;m-1)$ est un vecteur directeur de (d_m) alors les 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{V}_{(d_m)}$ sont colinéaires donc $\frac{X}{X'}=\frac{Y}{Y'}$ ce qui donne $\frac{2}{1}=\frac{m-1}{-1}$ on se ramène à $-m+1=2$ soit $m=-1$ par suite la droite de la famille dont un vecteur directeur est $(1;-1)$ est la droite (d_{-1}) d'équation $-2x-2y-4=0$ soit $x+y+2=0$

d) On a $a = \frac{-1}{2}$ ce qui donne $-\frac{m-1}{-2} = \frac{-1}{2}$ ce qui donne $m - 1 = -1$ soit $m = 0$ par suite la droite de la famille de coefficient directeur $\frac{-1}{2}$ est la droite d_0 d'équation $-x - 2y - 3 = 0$

Exercice 3 :
On considère la famille de droites $D_m : mx + (m+2)y - 2 = 0$ et les droites $(h) : 3x + 2y - 5 = 0$ et $(l) : -9x - 6y + 7 = 0$

a) Déterminer la position relative de (h) et (l)

b) Calculer m pour que D_m soit parallèle à (h)

c) Calculer pour que D_m soit perpendiculaire à (l)

d) Montrer que toutes les droites de la famille D_m passent par un même point I. Calculer les coordonnées de I

Solution

a) On a $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{3}{-9} = \dfrac{-1}{3}$, $\dfrac{v}{v'} = \dfrac{2}{-6} = \dfrac{-1}{3}$ et $\dfrac{w}{w'} = \dfrac{-5}{7}$ alors $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'} \neq \dfrac{w}{w'}$. Par suite les droites (h) et (l) sont parallèles.

b) D_m est parallèle à (h) alors $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'}$ ce qui donne $\frac{m}{3} = \frac{m+2}{2}$; $2m = 3m + 6$ soit $m = -6$

c) D_m est perpendiculaire à (l) équivaut à $uu' + vv' = 0$; $-9m - 6(m+2) = 0$; $-9m - 12m - 12 = 0$ soit $m = \frac{-4}{7}$

d) Soit $I(a; b)$ un point fixe appartenant à Dm alors $ma + (m+2)b - 2 = 0$ ce qui donne $ma + mb + 2b - 2 = 0$ soit $m(a+b) + 2b - 2 = 0$, c'est un pôlynome identiquement nul ; il faut que tous ses coefficients soients nuls alors
$$\begin{cases} a+b &= 0 \quad (1) \\ 2b-2 &= 0 \quad (2) \end{cases}.$$
L'équation (2) donne $2b - 2 = 0$ soit $b = 1$.
En remplacant b par sa valeur dans l'équation (2) on obtient $a + 1 = 0$ soit $a = -1$.
Ainsi toutes les droites de la famille D_m passent par un même point fixe $I(-1; 1)$

Exercice 4 :
On donne $B(2; 0)$ et $C(0; 2\sqrt{3})$.
Trouver les coordonnées du point I centre du cercle inscrit dans le triangle OBC.

Solution :
Le triangle OBC est semi-équilatéral : En effet dans le triangle OBC rectangle en O, $\tan B = \dfrac{OC}{OB} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ alors $\widehat{B} = 60°$ et par suite $\widehat{C} = 30°$.
Le point I centre du cercle inscrit dans le triangle OBC est le point d'intersection des bissectrices intérieures. La bissectrice $[OI)$ étant la première bissectrice du repère a pour équation $y = x$.
La bissectrice $[BI)$ passe par $B(2;0)$ et admet pour pente la tangente de l'angle que forme $[Bx)$ avec $[BI)$, comme $\widehat{OBI} = \dfrac{\widehat{OBC}}{2} = 30°$ alors l'angle que forme $[Bx)$ avec $[BI)$ est de $180° - 30° = 150°$.
La pente de $[BI)$ est $\tan(150°) = \tan(180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
L'équation de $[BI)$ s'écrit : $y - 0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$ ou $\sqrt{3}x + 3y - 2\sqrt{3} = 0$.
Les coordonnées de I sont données par la solution du système

$$\begin{cases} y &= x \quad (1) \\ \sqrt{3}x + 3y - 2\sqrt{3} &= 0 \quad (2) \end{cases}$$

.
En remplacant dans (2), y par x on obtient :
$\sqrt{3}x + 3x = 2\sqrt{3}$
$(\sqrt{3}+3)x = 2\sqrt{3}$, $\quad x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$, $\quad x = \dfrac{6\sqrt{3}-6}{6}$ soit $x = \sqrt{3} - 1$

Exercice 5 : On considère les droites (D_m) d'équation :
$(m+2)x + 2(m+3)y + (m-2) = 0$ où m est un paramètre réel.

1. Calculer m pour que (D_m) passe par $A(1;-2)$.
2. Calculer m pour que (D_m) passe par l'origine O du repère.
3. Calculer m pour que (D_m) soit parallèle à l'axe des x.
4. Calculer m pour que (D_m) soit parallèle à l'axe des y.
5. Calculer m pour que (D_m) soit parallèle à la droite (D) d'équation $2x - 3y + 1 = 0$
6. La droite (D_m) passe-t-elle par $B(1;-1)$.
7. Montrer que pour tout m, (D_m) passe par $C(-5;2)$.

Solution :

1. Comme A appartient à (D_m) alors les coordonnées de A vérifient l'équation de (D_m) on obtient
$$\begin{aligned}&(m+2)(1)+2(m+3)(-2)+(m-2)=0\\&m+2-4m-12+m-2=0\\&-2m-12=0\\&m=-6\end{aligned}$$
donc la droite (D_{-6}) est la droite qui passe par A
2. On sait que $u=m+2$ le coefficient de x, $v=2(m+3)$ le coefficient de y et $w=m-2$ le coefficient constant de l'équation cartésienne de (D_m). Puisque O appartient à (D_m) alors $w=0$ ce qui donne $m-2=0$ soit $m=2$.
Par suite la droite (D_2) est celle qui passe par l'origine O du repère.
3. (D_m) est parallèle à l'axe des x si et seulement si $u=0$ où u le coefficient de x de l'équation cartésienne de (D_m) ce qui donne $m+2=0$ soit $m=-2$ par suite la droite (D_{-2}) est celle qui est parallèle à l'axe des x.
4. (D_m) est parallèle à l'axe de y si et seulement si $v=0$ où v le coefficient de y de l'équation cartésienne de (D_m) ce qui donne $2(m+3)=0$ soit $m=-3$, par suite la droite (D_{-3}) est celle qui est parallèle à l'axe des y.
5. (D_m) est parallèle à la droite (D) si et seulement si $\dfrac{u}{u'}=\dfrac{v}{v'}$ ce qui donne
$$\begin{aligned}&\frac{m+2}{2}=\frac{2m+6}{-3}\\&-3m-6=4m+12\\&-7m=18\\&m=\frac{-18}{7}\end{aligned}$$
On peut aussi dire que (D_m) et (D) sont parallèles si elles ont la même pente.
La pente de (D_m) est $-\dfrac{(m+2)}{2(m+3)}$ et celle de (D) est $\frac{2}{3}$ on obtient $\dfrac{-m-2}{2(m+3)}=\dfrac{2}{3}$ donne $4(m+3)=-3(m+2)$; $4m+12=-3m-6$ donc $m=-\frac{18}{7}$

6. Si (D_m) passe par $B(1;-1)$, les coordonnées de B doivent vérifier l'équation de (D_m) alors $m+2-2m-6+m-2=0$ donne $0m=6$ ce qui est impossible alors aucune droite de la famille (D_m) ne passe par B.
7. Les coordonnées de C doivent vérifier l'équation de (D_m), en effet $-5m-10+4m+12+m-2=0$, $\quad 00m=0$ alors tout réel m est solution, donc toutes les droites (D_m) passent par C.

Exercice 6 : Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne la droite (D) d'équation $x-y-1=0$ et la droite (D') définie par le point $A(5;0)$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{v}(2;1)$.

1. Donner une équation cartésienne de (D').
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (D) et (D').
3. Trouver l'équation réduite de la droite (Δ) passant par A et de coefficient directeur 1.
4. Que peut-on dire des droites (d) et (Δ) ?
5. Soit (d_m) la famille de droites d'équation : $(m+3)x-(5m+1)y+3=0$ où m est un paramètre réel. Déterminer m pour que :
   a. (D) et (d_m) soient parallèles.
   b. (d_m) passe par $B(3;1)$
   c. (d_m) soit parallèle à $(y'Oy)$
   d. $\overrightarrow{u}(4;2)$ soit un vecteur directeur de (d_m)

Solution.

1. $M(x;y)$ est un point quelquonque de (D') si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{AM}(x-5;\, y)$ et $\overrightarrow{v}(2;1)$ donc $\dfrac{X}{X'}=\dfrac{Y}{Y'}$ donne $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{1}$ alors $x-5=2y$ soit $x-2y-5=0$ l'équation cartésienne de (D').
2. Les coordonnées du point d'intersection I de (D) et (D') vérifient le système suivant :
   $$\begin{cases} x-y-1 &= 0 \quad (1) \\ x-2y-5 &= 0 \quad (2) \end{cases}.$$
   En retranchant les deux équations membre à membre, on obtient $-y+2y-1+5=0$ ce qui donne $y+4=0$ soit $y=-4$.

Remplacons y par sa valeur dans l'équation (1) on obtient $x + 3 = 0$ soit $x = -3$.
Par suite les deux droites (D) et (D') se coupent au point $I(-3; -4)$

3. L'équation de la droite (Δ) est de la forme $y - y_A = m(x - x_A)$ avec $m =$ pente de (D)=1 ce qui donne $y = 1(x-5)$ soit $y = x-5$ l'équation réduite de la droite (Δ).

4. L'équation cartésienne de la droite (D) est $x - y - 1 = 0$, elle peut être rendue sous la forme réduite suivante $y = x - 1$. Par ailleurs, l'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit $y = x - 5$. On remarque que les deux droites (D) et (Δ) ont la même pente qui vaut 1 alors les droites (D) et (Δ) sont parallèles.

5. a. Pour que (D) et (d_m) soient parallèles il faut que $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'}$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\frac{m+3}{1} = \frac{-(5m+1)}{-1}\\
&m + 3 = 5m + 1\\
&m - 5m = 1 - 3\\
&-4m = -2\\
&m = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   b. Comme la droite (d_m) passe par le point $B(3; 1)$ alors les coordonnées de B doivent vérifier l'équation de (d_m) alors $3m+9-5m-1+3 = 0$; donne $-2m + 11 = 0$ soit $m = \frac{11}{2}$

   c. On a (dm) parallèle à l'axe $y'Oy$ alors $v = 0$ où v est le coefficient de y dans l'équation cartésiennne de (d_m) donc $-5m - 1 = 0$ soit $m = \frac{-1}{5}$.

   d. $\overrightarrow{u}(4; 2)$ est un vecteur directeur de (d_m) si et seulemennt si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}_{d_m}$ sont colinéaires où $\overrightarrow{v}_{d_m}(5m + 1; m + 3)$ est un vecteur direceur de (d_m) ce qui donne

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'}$$
$$\frac{5m+1}{4} = \frac{m+3}{1}$$
$$5m+1 = 4m+12$$
$$5m-4m = 12-1$$
$$m = 11$$

Exercice 7 : Soit (D) la droite d'équation $(m-1)x+(2m-3)y=0$ et (Δ) la droite d'équation $2x+y+3m-5=0$ où m est un paramètre réel.

(a) Calculer m pour que (D) soit parallèle à (Δ).

(b) Soit F le point d'intersection de (D) et (Δ) pour $m \neq \frac{5}{3}$.

   a) Trouver les coordonnées de F.

   b) Trouver l'ensemble des points F lorsque m varie.

Solution :

(a) Comme (D) est parallèle à (Δ) alors $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'}$ ce qui donne $\dfrac{m-1}{2} = 2m-3$; $m-1 = 4m-6$; $m-4m = -6+1$; $-3m = -5$ soit $m = \frac{5}{3}$.
En plus $(D_{\frac{5}{3}})$ passe par O car $w = 0$ et $(\Delta_{\frac{5}{3}})$ passe par O car $w = 0$ donc $(D_{\frac{5}{3}})$ est confondu avec $(\Delta_{\frac{5}{3}})$.

(b) Les coordonnées de F point d'intersection de (D) et (Δ) vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} (m-1)x+(2m-3)y &= 0 \quad (1) \\ 2x+y+3m-5 &= 0 \quad (2) \end{cases}$$

Multiplions l'équation (2) par $-(2m-3)$ on obtient

$$\begin{cases} (m-1)x+(2m-3)y &= 0 \quad (1) \\ -2(2m-3)x-(2m-3)y &= (3m-5)(2m-3) \quad (2) \end{cases}$$

Ajoutons les deux équations membre à membre

$$\begin{aligned}
&(m-1)x-2(2m-3)x=(3m-5)(2m-3)\\
&x(m-1-4m+6)=(3m-5)(2m-3)\\
&x(-3m+5)=(3m-5)(2m-3)\\
&x(-3m+5)=-(-3m+5)(2m-3)\\
&x=\frac{-(-3m+5)(2m-3)}{-3m+5}\\
&x=3-2m;\ \text{car}\ \ m\neq\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Remplacons x par son expression dans l'équation (1), on obtient

$$\begin{aligned}
&(m-1)(3-2m)+(2m-3)y=0\\
&(2m-3)y=-(m-1)(3-2m)\\
&y=\frac{(m-1)(2m-3)}{2m-3}\\
&y=m-1
\end{aligned}$$

alors les droites (d) et (Δ) se coupent au point $F(3-2m;m-1)$

Pour trouver l'ensemble des points F, il suffit de trouver une relation indépendante de m entre les coordonnées de F.
En effet $x=3-2m$ ce qui donne $2m=3-x$ soit $m=\frac{3-x}{2}$ et $y=m-1$ donne $m=y+1$. En comparant m, on obtient $\frac{3-x}{2}=y+1$, il s'ensuit que $3-x=2y+2$ soit $x+2y-1=0$.
Par suite l'ensemble des points F est la droite d'équation
$x+2y-1=0$

Exercice 8 : Trouver l'ensemble des points dans chacun des cas suivants :

a) $I(m-2;-m+3)$

b. $J(2;\ m+3)$

c. $K(m-1;\ -3)$

d. $L(\cos\alpha;\ 3+\sin\alpha)$

Solution :

a. Pour trouver l'ensemble des points I, il suffit de trouver une relation indépendante du paramètre m entre les coordonnées de ce point. En effet $x = m - 2$ donc $m = x + 2$ et $y = -m + 3$ donc $m = 3 - y$. En comparant m on obtient $x + 2 = -y + 3$ soit $x + y - 1 = 0$, donc l'ensemble des points I est la droite (D) d'équation $x + y - 1 = 0$.

b. On a $x = 2$ et $y = 3 + m$ alors l'ensemble des points J est la droite (D) d'équation $x = 2$.

c. L'ensemble des points K est la droite (D) d'équation $y = -3$

d. On a $x = \cos\alpha$ et $y = 3+\sin\alpha$ donne $\sin\alpha = y-3$ or $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ alors $x^2+(y-3)^2 = 1$ par suite l'ensemble des points L est la courbe d'équation $x^2 + (y-3)^2 = 1$ représentant un cercle (C) de centre $I(0;3)$ et de rayon $R = 1$

Exercice 9 : On donne la droite (D) d'équation $(m-2)x+2(n+3)y-6 = 0$, où m et n sont des paramètres réels.

1. Calculer m et n pour que (D) passe par les deux points $A(-1;2)$ et $B(2;-1)$. On appelle (Δ) cette droite.
2. Ecrire une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite (d) passant par $C(1;-2)$ et parallèle à (Δ).

Solution :

1. On a (D) passe par $A(-1;2)$ alors les coordonnées de A vérifient l'équation de (D) donc

$$\begin{aligned}
&(m-2)(-1) + 2(n+3)(2) - 6 = 0\\
&-m + 2 + 4n + 12 - 6 = 0\\
&-m + 4n = -8
\end{aligned}$$

On a (D) passe par $B(2;-1)$ alors les coordonnées de B vérifient l'équation de (D) donc

$$\begin{aligned}
&(m-2)(2) + 2(n+3)(-1) - 6 = 0\\
&2m - 4 - 2n - 6 - 6 = 0\\
&2m - 2n = 16\\
&m - n = 8
\end{aligned}$$

D'où le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcll} -m+4n &=& -8 & (1)\\ m-n &=& 8 & (2)\end{array}\right.$.

Ajoutons les 2 équations membre à membre on obtient $3n = 0$ soit

$n = 0$.
Remplacons n par sa valeur dans l'équation (1), on obtient $m = 8$. L'équation de (Δ) est donc $6x + 6y - 6 = 0$ ou $x + y - 1 = 0$

2. Comme les droites (d) et (Δ) sont parallèles alors $\overrightarrow{v}_\Delta$ est l'un des vecteurs directeurs de la droite (d).
   $M(x; y)$ est un point quelquonque de (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{v}_\Delta$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{CM}(x-1; y+2)$ et $\overrightarrow{v}_\Delta(-1; 1)$ alors $\dfrac{X}{X'} = \dfrac{Y}{Y'}$ ce qui donne $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{1}$; $-x+1 = y+2$ soit $x+y+1 = 0$ l'équation cartésienne de la droite (d)
   Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite (d), soit $M(x; y)$ est un point quelquonque de (d) si et seulement si $\overrightarrow{CM} = t\,\overrightarrow{v_\Delta}$ ce qui donne $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   soit $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -t+1 \\ y & = & t-2 \end{array} \right.$ un système d'équations paramétriques de la droite (d).

Exercice 10 :
On donne les points $A(\sqrt{2}; 0)$ et $B(0; \sqrt{6})$.

1. Donner une équation cartésienne de la médiane issue de O dans le triangle AOB.
2. Déduire en degrés, la mesure de l'angle que forme cette médiane et l'axe des x.

Solution :

1. Soit I le milieu de $[AB]$ alors les coordonnées de I sont :
   $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+0}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0+\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ soit $M(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{6}}{2})$.
   La médiane issue de O dams le triangle AOB passe par le milieu I du segment $[AB]$, par suite cette médiane n'est autre que la droite (OI).
   L'équation de (OI) s'écrit $y = ax$ avec $a = \dfrac{y_I}{x_I} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, par suite l'équation de la droite (OI) est $y = \sqrt{3}x$
2. La pente de la droite (OI) n'est autre que la tangente de l'angle α que forme la droite (OI) avec l'axe des x donc $a = \sqrt{3} = \tan\alpha$ ce qui donne

$\alpha = 60°$ alors la mesure de l'angle que forme la médiane (OI) avec l'axe des x est de $60°$.

Exercice 11 :
Ecrire une équation cartésienne de la droite (D) dans chacun des cas suivants.

1. (D) passe par $A(-2; 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(2; -3)$

2. (D) passe par $B(3; -2)$ et de coefficient directeur $m = \frac{3}{2}$.

3. (D) passe par $C(-\frac{1}{2}; 2)$ et (D) est parallèle à la droite (D') d'équation $-3x + 2y + 1 = 0$.

4. (D) passe par $A(-2; 2)$ et $B(1; -2)$

Solution :

1. $M(x; y)$ est un point quelquonque de la droite (D) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{AM}(x + 2; y - 1)$ et $\overrightarrow{v}(2; -3)$ ce qui donne $\dfrac{X}{X'} = \dfrac{Y}{Y'}$

$$\begin{aligned}
&\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} \\
&-3(x+2) = 2(y-1) \\
&3x + 6 = 2y - 2 \\
&3x - 2y + 8 = 0
\end{aligned}$$

2. L'équation de la droite (D) s'écrit $y - y_B = m(x - x_B)$ avec $m = \frac{3}{2}$, alors $y + 2 = \frac{3}{2}(x - 3)$; $\quad y + 2 = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ soit $\frac{3}{2}x - y - \frac{13}{2} = 0$ ou $3x - 2y - 13 = 0$.

3. $M(x; y)$ est un point quelquonque de la droite (D) si et seulememt si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{v}_{(D')}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{CM}(x + \frac{1}{2}; y - 2)$ et

$\overrightarrow{v}_{(D')}(-2;-3)$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'}\\
&\frac{x+\frac{1}{2}}{-2} = \frac{y-2}{-3}\\
&-3\left(x+\frac{1}{2}\right) = -2(y-2)\\
&-3x-\frac{3}{2} = -2y+4\\
&-3x+2y-\frac{11}{2} = 0\\
&6x-4y+11 = 0
\end{aligned}$$

4. $M(x;y)$ est un point quelquonque de la droite (D) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{AM}(x+2;y-2)$ et $\overrightarrow{AB}(3;-4)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'}\\
&\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-4}\\
&-4(x+2) = 3(y-2)\\
&-4x-8 = 3y-6\\
&-4x-3y-2 = 0\\
&4x+3y+2 = 0
\end{aligned}$$

Exercice 12 : Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan ; m un paramètre réel et Δ_m l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $(m+2)x+(m^2-4)y+1=0$.

1. Déterminer Δ_m lorsque $m=-2$.
2. Montre que Δ_m est une droite pour $m \neq -2$.
3. Déterminer m pour que $A(2;1) \in \Delta_m$.
4. Soit D la droite passant par A et de coefficient directeur $-\frac{1}{3}$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de la droite D.
   b) Déterminer la valeur de m pour que Δ_m et D soient parallèles.

Solution :

1. Pour $m=-2$, Δ_m n'existe pas.
2. Δ_m est une droite lorsque $m+2\neq 0$ ou $m^2-4\neq 0$ ce qui donne $m\neq -2$ ou $(m+2)(m-2)\neq 0$ soit $m\neq 2$ et $m\neq -2$ par suite Δ_m est une droite pour $m\neq -2$.
3. $A(2;1)\in\Delta_m$ alors les coordonnées de A vérifient l'équation de Δ_m ce qui donne $2(m+2)+(m^2-4)+1=0\,;\quad m^2+2m+1=0\,;$ $(m+1)^2=0\,;\quad$ soit $m=-1$.
4. a) L'équation cartésienne de la droite D s'écrit $y-y_A=m(x-x_A)$ avec $m=-\frac{1}{3}$ et $A(2;1)$ donc l'équation de D devient $y-1=\frac{1}{3}(x-1)\,;$ soit $\frac{1}{3}x-y+\frac{2}{3}=0$ ou $x-3y+2=0$.

   b) Δ_m et D sont parallèles alors $\dfrac{u}{u'}=\dfrac{v}{v'}$ ce qui donne $\frac{m+2}{1}=\frac{m^2-4}{-3}\,;$ $-3m-6=m^2-4\,;\quad m^2+3m+2=0\,;\quad \left(m^2+3m+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+2=0\,;$ $\left(m+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\,;\quad \left(m+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right);\quad (m+1)(m+2)=0$ soit $m=-1$ (acceptable) ou $m=-2$ (à rejeter).

Exercice 13 : Dans un repère orthonormé $(O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$, on donne le point $A(1;2)$ et la droite Δ d'équation $2x+3y-1=0$.

1. Calculer $d(A,\Delta)$.
2. Soit $m\in\mathbb{R}$ et D_m la famille de droites d'équation $(2m+1)x-y+4=0$. Déterminer m pour que $d(O;D_m)=1$.
3. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x;y)$ tels que $d(M;\Delta)=\sqrt{13}$.
4. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[OA]$.

Solution :

1. $d(A;\Delta)=\dfrac{|ux_A+vy_A+w|}{\sqrt{u^2+v^2}}=\dfrac{|2(1)+3(2)-1|}{\sqrt{13}}=\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$
2. On a $d(O;D_m)=1$ ce qui donne $\dfrac{|u'x_O+v'y_O+w|}{\sqrt{u'^2+v'^2}}=1\,;$

   $\dfrac{4}{\sqrt{4m^2+4m+2}}=1\,;\quad \sqrt{4m^2+4m+2}=4$, en élevant au carré les 2 membres de l'égalité on obtient $4m^2+4m+2=16$

   $4m^2+4m-14=0\,;\quad (4m^2+4m+4)-4-14=0\,;\quad (2m+2)^2-18=0\,;$ $4(m+1)^2-18=0\,;\quad (m+1)^2=\frac{9}{2}\,;\quad m+1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $m+1=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ soit $m=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$ ou $m=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

3. On a $d(M;\Delta) = \sqrt{13}$ alors $\dfrac{|2x+3y-1|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$ il s'ensuit que $|2x+3y-1| = 13$ ce qui donne $2x+3y-1 = 13$ ou $2x+3y-1 = -13$ soit $2x+3y-14 = 0$ ou $2x+3y+12 = 0$ alors l'ensemble des points $M(x;y)$ est l'union des deux droites d'équations respectives $2x+3y-14 = 0$ et $2x+3y+12 = 0$.
4. Soit I le milieu du segment $[OA]$ alors les coordonnées de I sont :
   $x_I = \dfrac{x_O + x_A}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_O + y_A}{2} = 1$ donc $I(\frac{1}{2};1)$.
   On a $a_{(OA)} = \dfrac{y_A}{x_A} = 2$, de plus la médiatrice de $[OA]$ est perpendiculaire au segment en son milieu I.
   L'équation de (d) la médiatrice de $[OA]$ s'écrit $y - y_I = a_{(d)}(x - x_I)$ avec $a_{(d)} \times a_{(OA)} = -1$ alors $a_{(d)} = \frac{-1}{a_{(OA)}} = \frac{-1}{2}$. Donc l'équation de (d) devient $y - 1 = \frac{-1}{2}(x - \frac{1}{2})$; $\frac{1}{2}x + y - \frac{5}{4} = 0$ ou $2x + 4y - 5 = 0$.

Exercice 14 :
Dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne :

- la droite (d) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$
- la droite (d') d'équation cartésienne $4x + 3y - 9 = 0$.
- le point $A(5;5)$ et le point $B(-4;\frac{19}{3})$

1. Montrer que (d) et (d') sont parallèles.
2. Donner la forme cartésienne de (d).
3. a. Prouver que la distance qui sépare (d) et (d') est de 1 unité de longueur.
   b. Suggérer, sans exécution, une méthode permettant de savoir si le point B est entre (d) et (d') ou non.
   c. Déterminer une équation de la droite (D) passant par A et perpendiculaire à (d).
   d. Trouver les traces E et F de (D) sur (d) et (d') respectivement. Vérifier alors le résulat obtenu en a.

Solution :

1. Les droites (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{v}_{(d)}$ et $\overrightarrow{v}_{(d')}$ sont colinéaires où $\overrightarrow{v}_{(d)}(3;-4)$ est un vecteur directeur de (d) et $\overrightarrow{v}_{(d')}(-3;4)$ est un vecteur directeur de (d').

En effet $\det(\overrightarrow{v}_{(d)}, \overrightarrow{v}_{(d')}) = XY' - X'Y = 3(4) - (-3)(-4) = 12 - 12 = 0$ par suite $\overrightarrow{v}_{(d)}$ et $\overrightarrow{v}_{(d')}$ sont colinéaires, il s'ensuit que les droites (d) et (d') sont parallèles.

2. En se référant aux équations paramétriques de la droite (d), l'équation (1) donne $x = 1 + 3t$ donc $t = \frac{x-1}{3}$.
   L'équation (2) donne $y = -4t$ donc $t = -\frac{y}{4}$. En égalisant t, on obtient $\dfrac{x-1}{3} = -\dfrac{y}{4}$; $\quad 4x - 4 = -3y$ soit $4x + 3y - 4 = 0$ l'équation cartésienne de la droite (d).

3. a. Le point I de coordonnées $(1; 0)$ est un particulier de (d) extrait des équations paramétriques de la droite (d). La distance qui sépare (d) de (d') n'est autre que la distance qui sépare un point de (d) de (d') ainsi

   $$d\left((d), (d')\right) = d\left(I, (d')\right) = \frac{|ux_I + vy_I + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{|4(1) + 3(0) - 9|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{5}{5} = 1$$

   ainsi la distance qui sépare (d) et (d') est de 1 unité de longueur.

   b. Pour savoir si le point B est entre (d) et (d'), il suffit de calculer la distance de B à (d') et la distance de B à (d) et les comparer à 1, si l'une des distances calculées au moins est suppérieur à 1, cela signifie que le point B n'est pas entre (d) et (d') et si les deux distances calculées sont inférieurs à 1, cela signifie que le point B est situé entre (d) et (d').

   c. L'équation de la droite (D) s'écrit $y - y_A = m(x - x_A)$ or (D) est perpendiculaire à (d) alors $m \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -1$ ce qui donne $m = \frac{3}{4}$, par suite l'équation de (D) devient $y - 5 = \frac{3}{4}(x - 5)$; $\quad \frac{3}{4}x - y + \frac{5}{4} = 0$ ou $3x - 4y + 5 = 0$ l'équation cartésienne de (D).

   d. E étant le point d'intersection de (D) et (d) alors ses coordonnées vérifient le système suivant : $\left\{\begin{array}{c} 3x - 4y + 5 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ y = -4t \end{array}\right.$.
   Remplacons x et y par leurs expressions dans l'équation (1), on obtient $3 + 9t + 16t + 5 = 0$; $\quad 25t = -8$; soit $t = -\frac{8}{25}$.
   En remplacant t par sa valeur dans l'équation (2) et (3), on obtient : $x = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}$ et $y = -4\left(\frac{-8}{25}\right) = \frac{32}{25}$, par suite $E\left(\frac{1}{25}; \frac{32}{25}\right)$.
   Les coordonnées du point F interrsection de (D) et (d') vérifient le

système suivant : $\begin{cases} 3x - 4y + 5 &= 0 \\ 4x + 3y - 9 &= 0 \end{cases}$.
On multiplie l'équation (1) par -4 et l'équation (2) par 3, on obtient
$\begin{cases} -12x + 16y - 20 &= 0 \\ 12x + 9y - 27 &= 0 \end{cases}$.
On ajoute les 2 équations membre à membre, on aura $25y - 47 = 0$ soit $y = \frac{47}{25}$.
Remplacons y par sa valeur dans l'équation (1), on aura

$$\begin{aligned} 3x - 4 \times \frac{47}{25} + 5 = 0 \\ 3x - \frac{188}{25} + 5 = 0 \\ 3x = \frac{63}{25} \quad \text{soit} \quad x = \frac{21}{25} \end{aligned}$$

Alors les coordonnées de F sont $\left(\frac{21}{25}; \frac{47}{25}\right)$.
Comme (D) est la perpendiculaire commune à (d) et (d') qui les coupe respectivement en E et F alors la distance entre les deux droites parallèles (d) et (d') n'est autre que EF. Par ailleurs

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{21}{25} - \frac{1}{25}\right))^2 + \left(\frac{47}{25} - \frac{32}{25}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

ce qui confirme le résulatt obtenu en a.

Exercice 15 :
Soit (C) un cercle de centre $O(3; -2)$; $(d) : x + 3y - 5 = 0$ est une équation de la tangente à (C). Calculer le périmètre de (C).
Solution :
On a (C) est tangent à (d) alors $d(centre; (d)) = Rayon$ soit $Rayon = d(O; (d))$;

par ailleurs

$$\begin{aligned} d(O;(d)) &= \frac{|ux_O + vy_O + w|}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ &= \frac{|3\times 1 + 3\times(-2) - 5|}{\sqrt{9+1}} \\ &= \frac{|-8|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

Ainsi $P_{(C)} = 2\pi R = 2\pi \times \frac{4\sqrt{10}}{5} = \frac{8\pi\sqrt{10}}{5}u$.

Exercice 16 : Pour tout réel m, on appelle D_m l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient $(m+2)x-(m+1)y-1=0$.

1. Déterminer et construire la droite D_2.
2. Démontrer que, quelle que soit la valeur de m, D_m est une droite du plan.
3. Déterminer les réels m pour lesquels la droite D_m est parallèle à l'un des axes de coordonnées.
4. Montrer que toutes les droites D_m passent par un même point A dont on détermineral ses coordonnées.

Solution :

1. Pour $m=2$, l'équation de D_2 s'écrit $4x-3y-1=0$, c'est une droite qui passe par les deux points $A(1,1)$ et $B(\frac{1}{4};0)$.
2. D_m n'est pas une droite si $m+1$ et $m+2$ s'annulent en même temps. Ce qui n'est pas possible donc D_m est une droite pour tout réel m. Cette famille de droites a pour vecteur directeur $(m+1;m+2)$ et passe par le point $\left(\frac{1}{m+2};0\right)$ si m différent de -2.
3. D_m est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $m+2=0$ soit $m=-2$; dans ce cas il s'agit de la droite D_{-2} d'équation $y=1$.
   D_m est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $m+1=0$ soit $m=-1$; dans ce cas il s'agit de la droite D_{-1} d'équation $x=1$.
4. S'il existe un point $M(a;b)$ appartenant à la famille de droites D_m ; donc il appartient à D_{-2} et D_{-1} ; dans ce cas $a=1$ et $b=1$, c'est donc le point $M(1;1)$.
   Montrons que $M(1;1)$ appartient à D_m quel que soit la valeur de m.

En effet $(m+2)(1)-(m+1)(1)-1 = m+2-m-1-1 = 0$ donc $M(1;1)$ appartient à D_m pour tout réel m.

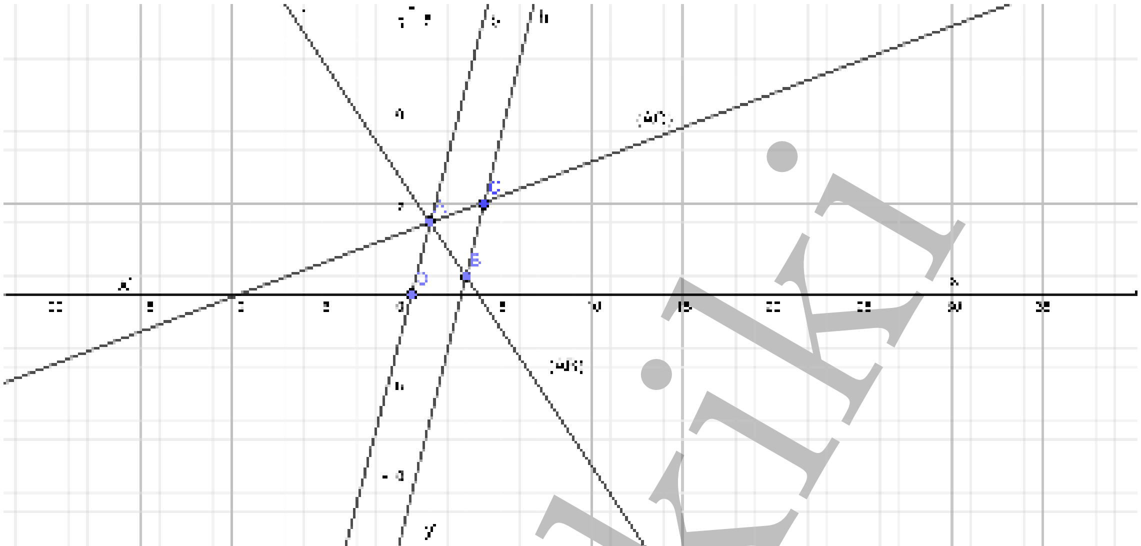
Exercice 17 : Les points A, B et C du plan sont tels que

- (AC) admet une représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= 3t-5 \\ y &= t+2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
- (AB) a pour équation réduite $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$.
- (BC) est parallèle à (OA).
- B a pour ordonnée 1.

1. Faire une figure.
2. Trouver les coordonnées de A et B.
3. Donner la représentation paramétrique de (OB).
4. Donner une équation cartésienne de (BC).
5. Montrer que $OBCA$ est un parallélogramme.
6. Soit (d) la droite d'équation $3x+2y=k \quad (k \in \mathbb{R})$.
   a. Déterminer k pour que C appartienne à (d).
   b. Calculer dans ce cas, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de (BC).

Solution :

1. Tracons la droite (AC) : Pour $t=0$ on a $x=-5$ et $y=2$; pour $t=1$ on a $x=-2$ et $y=3$.
   Pour la droite (AB) ; $x=0$ donne $y=\frac{11}{2}$ et $x=1$ donne $y=4$.
   Pour obtenir le point B on trace la droite $y=1$ qui coupe (AB) en B.
   Pour obtenir C, on mène de B la parallèle à (OA) qui coupe (AC) en B.
2. Le point A étant le point d'intersection des droites (AB) et (AC) alors ses coordonnées vérifient le système suivant :
   $\begin{cases} x &= 3t-5 \\ y &= t+2 \\ y &= -\frac{3}{2}x+\frac{11}{2} \end{cases}$.
   Remplacons x et y par leurs expressions dans l'équation (3) :
   $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$; $\quad t+2 = -\dfrac{3}{2}(3t-5) + \dfrac{11}{2} \quad t+2 = -\dfrac{9}{2}t + \dfrac{15}{2} + \dfrac{11}{2}$;
   $t+2 = -\dfrac{9}{2}t + 13$; $\quad 2t+4 = -9t+26$; $\quad 11t = 22$; soit $t=2$.



Remplacons t par sa valeur dans les équations (1) et (2), on obtient $x = 3(2) - 5 = 6 - 5 = 1$ et $y = 2 + 2 = 4$ alors les coordonnées de A sont $(1; 4)$.
L'équation de (OA) est de la forme $y = ax$ avec $a = \frac{y_A}{x_A} = 4$ alors l'équation de (OA) devient $y = 4x$.
Le point B ayant pour ordonnée 1 appartient à (AB) alors ses coordonnées vérifient l'équation de (AB) donc $y_A = -\dfrac{3}{2}x_A + \dfrac{11}{2}$; $1 = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$; $\quad \dfrac{3}{2}x = \dfrac{9}{2}$ soit $x = 3$ donc $B(3; 1)$.

3. $M(x; y)$ est un point quelquonque de (OB) si et seulement si $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OB}$ avec k est un paramètre réel ce qui donne
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; il s'ensuit que $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3k \\ y & = & k \end{array} \right.$ est une représentation paramétrique de la droite (OB).

4. On sait que $a_{(OA)} = \dfrac{y_A}{x_A} = 4$. De plus, l'équation de (BC) s'écrit $y - y_B = m(x - x_B)$ or (BC) est parallèle à (OA) alors $m = 4$ donc l'équation de (BC) devient $y - 1 = 4(x - 3)$ soit $4x - y - 11 = 0$ l'équation cartésienne de (BC)

5. Un vecteur directeur de la droite (OB) est $\overrightarrow{u}(3; 1)$ et un veteur directeur de la droite (AC) est également $(3; 1)$ par suite les vecteurs

directeurs des droites (OB) et (AC) sont colinéaires, par suite les droites (OB) et (AC) sont parallèles. De plus (BC) est parallèle à (OA) alors le quadrilatère $OBCA$ est un parallélogramme comme ayant les côtés opposés parallèles deux à deux.

6. a. Le point C étant le point d'intersection des droites (AC) et (BC) alors ses coordonnées vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = t + 2 \\ 4x - y - 11 = 0 \end{cases}.$$
Remplacons x et y par leurs expressions dans l'équation (3) on obtient $12t - 20 - t - 2 - 11 = 0$; $\quad 11t - 33 = 0$ soit $t = 3$. On substitue t par sa valeur dans x et y, on obtient $x = 3(3) - 5 = 4$ et $y = 3 + 2 = 5$ donc les coordonnées de C sont $(4; 5)$.

   C appartient à la droite (d) alors les coordonnées de C vérifient l'équation de (d) ; $3x_C + 2y_C = k$; $\quad 12 + 10 = k$ soit $k = 22$.

   b. Les coordonnées du point d'intersection I de (d) et de (BC) vérifient le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y - 22 = 0 & (1) \\ 4x - y - 1 = 0 & (2) \end{cases}$.

L'équation (2) donne $y = 4x - 11$. En remplant y par son expression dans l'équation (1), on obtient $3x + 2(4x - 11) - 22 = 0$;
$3x + 8x - 44 = 0$; soit $x = 4$. Remplacons x par sa valeur dans y, on obtient :
$y = 4(4) - 11 = 16 - 11 = 5$. Par suite les coordonnées de I sont $(4; 5)$.

Chapitre 3

Produit scalaire : Roy Akiki

Exercice 1 : Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{7}$, $AC = 2$ et $BC = 3$.

1. Calculer $\cos(\widehat{BAC})$ et montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1$.
2. On considère le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
   a. Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$.
   b. Montrer que les droites (MB) et (AC) sont orthogonaux.

Corrigé.

1. D'après le théorème d'Al Kachi, on a
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$
.
Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$.
Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{(\sqrt{7})^2 + 2^2 - 3^2}{2(\sqrt{7}) \times (2)} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$.
On sait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\sqrt{7}) \times (2) \times \frac{\sqrt{7}}{14} = 1$
2. a. On a
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}AC^2 \\ &= \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{6}(2^2) = 1\end{aligned}$$

b. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC}\\ &= \left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = -1+1=0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0$. Alors les droites (MB) et (AC) sont orthogonaux.

Exercice 2 : Soit ABC un triangle tel que $AB=2\sqrt{3}$, $AC=1$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3$.

1. Trouver la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$
2. Soit I le milieu du segment $[BC]$, calculer BC et en déduire la valeur de AI.

Solution :

1. On sait que : $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}$.
   Donc $\cos(\widehat{BAC})=\frac{-3}{2\sqrt{3}\times 1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
   Alors l'une des mesures de l'angle $\widehat{BAC}$ est $\frac{5\pi}{6}$.

2. D'après le théorème d'Al Kashi, on a $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
   Donc $BC^2=(2\sqrt{3})^2+(1)^2-2(-3)=19$ et par suite $BC=\sqrt{19}$.
   En appliquant le théorème de la médiane, on a :

$$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$$

   Donc $AI^2=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\dfrac{1}{2}BC^2\right)$.
   Alors $AI^2=\frac{1}{2}\left((2\sqrt{3})^2+(1)^2-\frac{1}{2}(\sqrt{19})^2\right)=\frac{7}{4}$.
   Par suite $AI=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 3 :
Soit ABC un triangle tel que $AB=6$, $AC=5$ et $BC=7$.

1. Montrer que $\cos(\widehat{BAC})=\frac{1}{5}$.
2. a. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$

3. Soit H le projecté orthogonal de A sur $[BC]$, calculer la distance BH

Solution :

1. D'après le théorème d'Al Kashi, on a

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

Donc : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$.

Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{(6)^2 + (5)^2 - (7)^2}{2(6) \times 5} = \dfrac{12}{60}$

Et par suite $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{5}$.

2. a. On sait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
   Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6 \times 5 \times \frac{1}{5}$, par suite $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$.

   b.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= BA^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}\\ &= BA^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &= 6^2 - 6 = 30\end{aligned}$$

3. On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = BH \times BC$ car $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} > 0$.

   Donc $BH = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC} = \dfrac{30}{7}$

Exercice 4 : Soient A et B deux points du plan tel que $AB = 6$.

1. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ tel que I est le milieu du segment $[AB]$.
2. En déduire l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :
   a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -9$
   b. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 7$.
   c. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -12$
   d. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Solution :

1. Soit M un point du plan, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\\ &= MI^2+\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}\\ &= MI^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{0}+\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right).\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= MI^2-\frac{1}{4}AB^2\end{aligned}$$

   Donc pour point M du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

2. a. On pose $E = \{M \in P \ / \ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -9\}$.
   $M \in E$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -9$
   Equivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = -9$, équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}(6)^2 = -9$ équivaut à $MI = 0$. Et par suite $E = \{I\}$.

   b. On pose $F = \{M \in P \ / \ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 7\}$.
   $M \in F$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 7$
   Equivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = -9$, équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}(6)^2 = 7$ équivaut à $MI^2 = 16$. Et par suite F est le cercle de centre I et de rayon 4.

   c. On pose $G = \{M \in P \ / \ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -12\}$.
   $M \in E$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -12$
   Equivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = -12$, équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}(6)^2 = -12$ équivaut à $MI^2 = -3$. Et par suite $G = \emptyset$.

   d. On pose $H = \{M \in P \ / \ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\}$.
   $M \in H$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
   Equivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0$, équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}(6)^2 = 0$ équivaut à $MI^2 = 3^2$. Et par suite H est le cercle de centre I et de rayon 3.
   Remarque : M appartient à G équivaut à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ et par suite H est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 5 : Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{7}$; $AC = 5$ et $BC = 2$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 14$.
2. Montrer que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{7}}{5}$
3. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Calculer la distance AH.
4. Soit I le milieu du segment $[BC]$. Calculer la distance AI.

5. On considère le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{25}\overrightarrow{AC}$

   a. Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$

   b. Montrer que les droites (BM) et (AC) sont orthogonaux.

Solution :

1. D'après le théorème d'Al Kashi, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$.
   Donc $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.
   Alors $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{7})^2 + (5)^2 - (2)^2\right)$ et par suite $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = 14$.

2. On sait que $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$.
   Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{14}{\sqrt{7} \times 5}$ et par suite $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{7}}{5}$

3. Puisque $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} > 0$ donc $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ donc $AH = \dfrac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{AH}$
   alors $AH = \frac{14}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7}$.

4. En appliquant le théorème de la médiane, on trouve que :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

   Alors $AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^{+}AC^2 - \frac{1}{2}BC^2\right)$
   Donc $AI^2 = \frac{1}{2}\left((\sqrt{7})^2 + (5)^2 - \frac{1}{2}(2)^2\right) = 15$
   Et par suite $AI = \sqrt{15}$.

5. a.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}\overrightarrow{AC} &= \left(\frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{25}\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \frac{12}{25}AC^2 \\
&= \frac{1}{7}(14) + \frac{12}{25}(5)^2 \\
&= 14
\end{aligned}$$

b. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC}\\ &= \left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}\\ &= -14+14\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{BM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$, par suite les droites (BM) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 6 : On donne dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ deux vecteurs $\overrightarrow{u}(3;-4)$ et $\overrightarrow{v}(4;3)$. Calculer $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ avec α l'angle des deux vecteurs.

Solution :

- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' = 3\times 4 - \times 3 = 0$.

Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc orthogonaux donc $\alpha = 90°$ ce qui donne $\cos\alpha = 0$ et $\sin\alpha = 0$.

Exercice 7 : Soit A et B deux points tels que $AB = 5$.

1. a. Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 10$?
   b. En déduire la construction du point C tel que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10$ et $AC = 4$
2. Soient D et E les points définis par :

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

   Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$.
   En déduire que $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CD} = 0$.
   Que représente la droite (CD) pour le triangle BDE ?

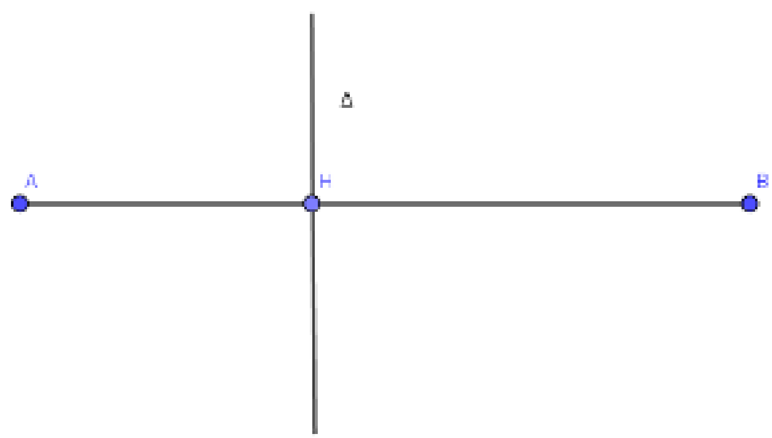
Solution :

1. a. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 10 \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{AB}\times\overline{AH} = 10\\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens et } \ AH = 2 \text{ (car } \ AB = 5)\end{aligned}$$

La seule position de H est donc :

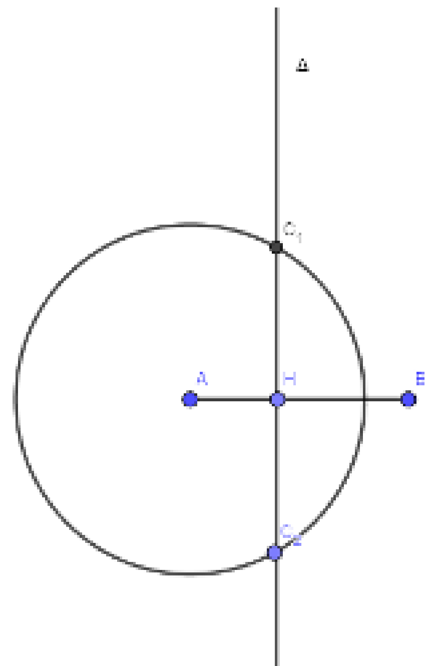
L'ensemble des points M cherché est donc la droite Δ perpendiculaire à (AB) en H.



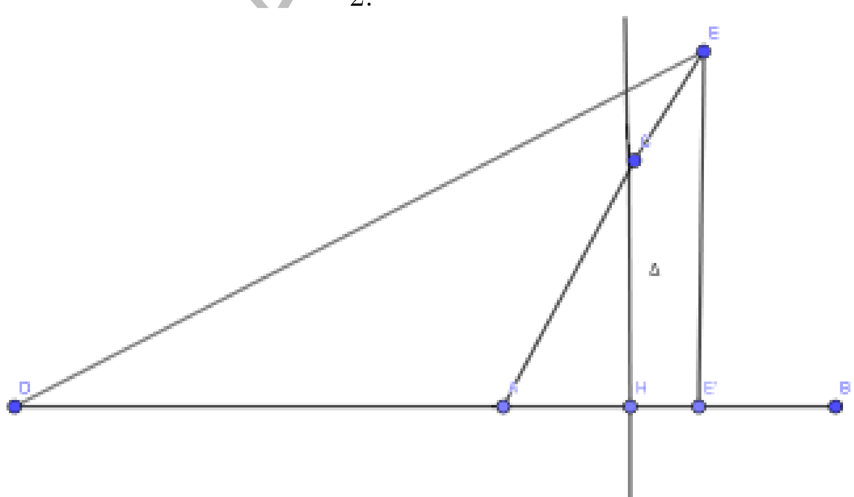
b. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10 \quad &\Leftrightarrow \quad C \in \Delta \\ AC = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad C \in C(A, 4) \end{aligned}$$

Il y a deux points possibles C_1 et C_2



2.



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{HD} = 5 \times (-9) = -45$$
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = \overline{AC} \times \overline{AE} = 4 \times 6 = 24$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = \overline{AD} \times \overline{AE'} = (-7) \times 3 = -21$$

De plus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CD} &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{CD}\\ &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AE}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}\\ &= 45-21-24\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc (BE) est perpendiculaire à (CD) ce qui prouve que (CD) est la hauteur issue de D dans le triangle BED.

Exercice 8 : Soit dans le plan orienté, un parallèlogramme $ABCD$ tel que :

$$AB = 6cm; \qquad AD = 4cm \qquad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{2\pi}{3}$$

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
2. a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

   b. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$.

   c. Les points C et D se projettent orthogonalement en C' et D' sur la droite (AB) orientée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   Calculer $\overline{AC'}$ et $\overline{AD'}$.

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} &= AB\times AD\times cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= 6\times 4\times\left(\frac{-1}{2}\right)\\ &= -12\end{aligned}$$

2. a. On a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

b. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\\ &= \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\\ &= 36-12=24\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2\\ &= -12-36=-48\end{aligned}$$

c. On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}\times\overline{AC'} = 24 \quad \text{et} \quad \overline{AB}=6$$

Par suite $\overline{AC'} = 4.$

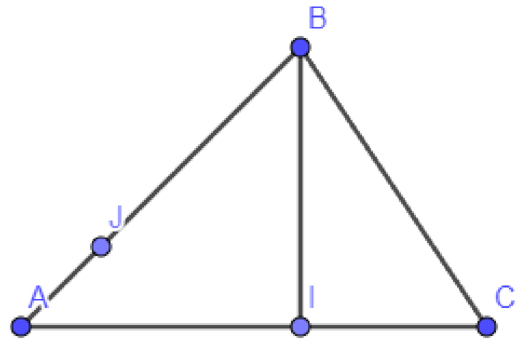
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overline{AB}\times\overline{AD'} = -48 \quad \text{et} \quad \overline{AB}=6$$

Par suite $\overline{AD'} = -8$

Exercice 9 : ABC est un triangle tel que $AB=8$, $AC=5$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}\,rad$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et la distance BC.
2. Soit I le projeté orthogonal du point B sur (AC). Calculer AI.
3. Soit J le point de $[AB]$ tel que $AJ=\frac{5}{2}$. Vérifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire que (AB) est perpendiculaire à (CJ).
4. Calculer IJ.

Solution :



1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 8 \times 5\cos(\frac{\pi}{3}) = 40 \times \frac{1}{2} = 20.$

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\frac{\pi}{3}) \\ &= 64 + 25 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 49 \end{aligned}$$

   Donc $BC = \sqrt{49} = 7$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{AI}{AB}$ donc $AI = AB \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$

3. On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ} = AB \times AJ$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires et de même sens.
   Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ} = 8 \times \frac{5}{2} = 20$, par suite $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
   On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AC}) = 0$ d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ} = 0$ donc (AB) est perpendiculaire à (CJ).

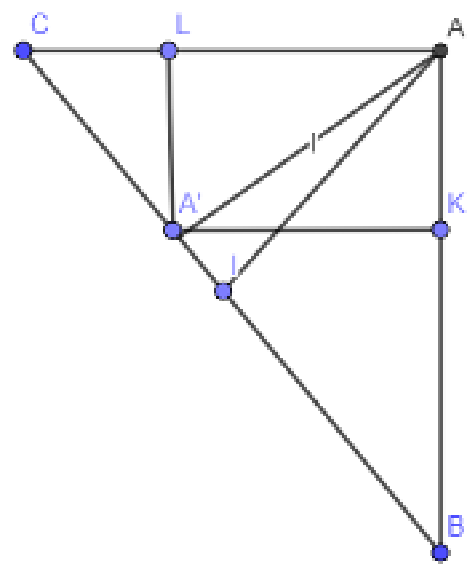
4. Considérons le triangle AIJ. On a

$$\begin{aligned} IJ^2 &= AI^2 + AJ^2 - 2AI.AJ.\cos(\widehat{IAJ}) \\ &= \frac{25}{4} + 16 - 2 \times 4 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{25}{4} + 16 - 10 = \frac{49}{4} \end{aligned}$$

Alors $IJ = \frac{7}{2}$.

Exercice 10 : ABC est un triangle rectangle en A. A' le projeté orthogonal de A sur (BC). I est le milieu de $[BC]$. L et K respectivement les projetés orthogonaaux de A' sur (AC) et sur (AB).
Montrer que (AI) est perpendiculaire à (LK).

Solution :



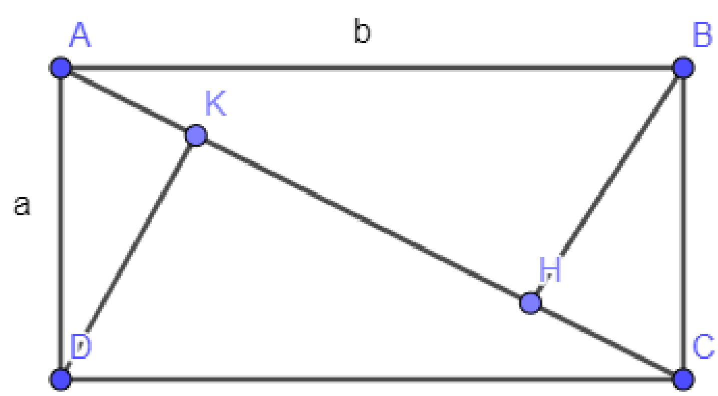
On a $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{LK} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{LK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{LK} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{LA} \\
&\text{car } A \text{ est le projeté orthogonal de } L \text{ sur } (AB) \\
&\text{et } K \text{est le projeté orthogonal de } K \text{sur } (AC). \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AA'} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AA'} = 0 \quad \text{car } (AA') \quad \text{perpendiculaire à } (BC)
\end{aligned}$$

Donc (AI) est perpendiculaire à (LK).

Exercice 11 : $ABCD$ est un rectangle. On pose $AB = b$ et $AD = a$.
Soient H et K les projetés orthogonaux de B et D sur (AC) respectivement.
Calculer HK en fonction de a et b.

Solution :



On a H et K les projetés orthogonaux de B et D respectivement aur (AC) donc $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = \overline{HK} \times \overline{AC}$. D'autre part

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} \\ &\text{car } B \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB) \\ &\text{et } D \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AC) \\ &= -AB^2 + AD^2 = -b^2 + a^2\end{aligned}$$

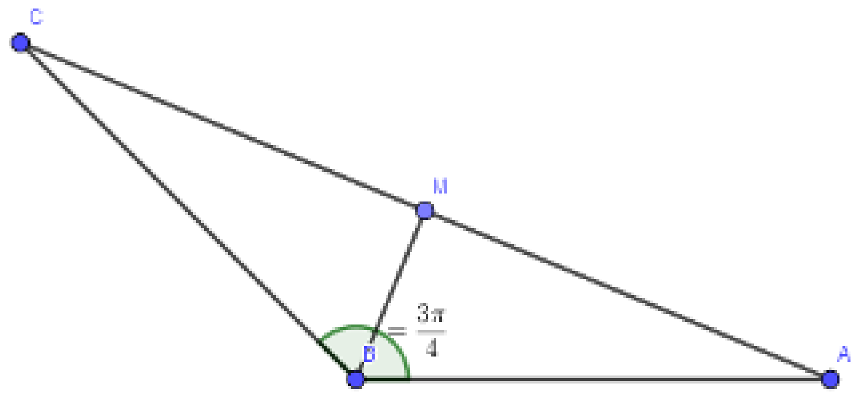
Donc $HK \times AC = |a^2 - b^2|$
D'où $HK = \dfrac{|a^2 - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exercice 12 : On considère dans le plan (P) le triangle ABC tel que $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6$.

1. Montrer que $\widehat{BAC} = \dfrac{3\pi}{4}$.
2. Calculer la distance BC
3. Calculer $\sin(\widehat{C})$.
4. Soit M un point de $[BC]$. Calculer la distance CM pour que CAM soit rectangle en A.

Solution :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ Donc $-6 = 3\sqrt{2} \times 2 \times \cos(\widehat{BAC})$ d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{-6}{6\sqrt{2}}$ alors $\cos(\widehat{BAC}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et puisque $\widehat{BAC} \in [0;\pi]$ alors $\widehat{BAC} = \dfrac{3\pi}{4}$.
2. $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 18 + 4 + 12 = 34$ d'où $BC = \sqrt{34}$



3.
   On a $\dfrac{sin(\widehat{C})}{AB} = \dfrac{\sin(\widehat{A})}{BC}$.
   Alors $\sin(\widehat{C}) = \dfrac{AB}{BC}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{34}}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

4. On a $\cos(\widehat{C}) = \dfrac{AC}{MC}$ donc $MC = \dfrac{AC}{\cos(\widehat{C})}$. Par ailleurs on remarque que $\cos^2(\widehat{C}) = 1 - \dfrac{9}{34} = \dfrac{25}{34}$ soit $\cos(\widehat{C}) = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$.
   Il s'ensuit que $MC = \dfrac{2}{\frac{5}{\sqrt{34}}}$, soit $MC = \dfrac{2\sqrt{34}}{5}$.

Exercice 13 : Les questions sont indépendantes.

1. Trouver l'équation de la droite (d) passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{N}(2;-3)$.
2. On donne le point $B(2;3)$ et la droite (D) d'équation $x + 2y - 1 = 0$.
   Calculer la distance de A à la droite (D).
3. On donne le triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$
   Calculer la longueur de $[BC]$.
4. On donne le point $N(1;3)$ et le vecteur $\overrightarrow{v}(3;-5)$.
   Déterminer le lieu géométrique de M vérifiant $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{NM} = -3$

Solution :

1. $M(x;y)$ est un point quelconque de (D) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{N}=0$. avec $\overrightarrow{AM}(x-1;y-3)$ et $\overrightarrow{N}(2;-3)$ ce qui donne $XX'+YY'=0$; $2(x-1)-3(y-3)=0$ soit $2x-3y+7=0$ l'équation de (D).

2. La distance de B à (D) est donnée par ce qui suit :

$$\begin{aligned} d(B,D) &= \frac{|ux_A+vy_A+w|}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ &= \frac{|2+6-1|}{\sqrt{1+4}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

3. D'après le théorème de pythagore généralisé on a

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos(\widehat{BAC}) \\ &= 16+4-16\cos(60^\circ) \\ &= 20-16\times\frac{1}{2}=12 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $BC=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

4. On pose $M(x;y)$ ce qui donne $\overrightarrow{NM}(x-1;y-2)$ avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{NM}=-3 &\Leftrightarrow XX'+YY'=0 \\ &\Leftrightarrow 3(x-1)-5(y+2)=-3 \quad 3x-3-5y+10=0 \\ &\Leftrightarrow 3x-5y+10=0 \end{aligned}$$

Par suite M varie sur la droite d'équation (d) d'équation $3x-5y+10=0$.

Exercice 14 : Dans un repère orthonormé on donne $A(-2;-1)$, $B(-1;3)$ et $C(7;1)$.

1. Montrer que la droite (AB) est la tangente en B au cercle de centre C et de rayon $[BC]$.
2. Calculer $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$ et en déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BCA}$

Solution :

1. (AB) est la tangente en B au cercle de centre C et de rayon $[BC]$ si et seulement si $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$.

En effet $\overrightarrow{BA}(-1;-4)$ et $\overrightarrow{BC}(8;-2)$ et en appliquant la formule analytique du produit scalaire on obtient $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = XX' + YY' = -8 + 8 = 0$ ce qui montre que (AB) est la tangente en B au cercle de centre C et de rayon $[BC]$.

2. On a $\overrightarrow{CB}(-8;2)$ et $\overrightarrow{CA}(-9;-2)$ alors $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = (-8) \times (-9) + 2 \times (-2) = 72 - 4 = 68$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{BCA}) &= \frac{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CB}\|.\|\overrightarrow{CA}\|} \\
&= \frac{68}{\sqrt{(-8)^2 + (2)^2}.\sqrt{(-9)^2 + (-2)^2}} \\
&= \frac{68}{\sqrt{68}.\sqrt{85}} = \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{85}} \\
&= \frac{\sqrt{2^2 \times 17}}{\sqrt{17 \times 5}} = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{17} \times \sqrt{5}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \simeq 0,89
\end{aligned}$$

Par suite $\widehat{BCA} \simeq 27,1°$.

Exercice 15 : Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(3;2)$ et $B(-5;-3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) puis les coordonnées d'un vecteur normal à cette droite.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) perpendiculaire à la droite (AB) passant par $C\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$.
3. Quelles sont les coordonnées du point C' symétrique du point C par rapport à la droite (AB) ?

Solution :

1. Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-8;-5)$.
On considère un point $M(x;y)$ du plan. On a alors $\overrightarrow{AM}(x-3;y-2)$.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow -8(y-2)-(x-3)\times(-5)=0 \\ &\Leftrightarrow -8y+16+5x-15=0 \\ &\Leftrightarrow 5x-8y+1=0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc $5x-8y+1=0$.
Un vecteur normal à cette droite est donc $\overrightarrow{n}(5;-8)$.

2. Un vecteur directeur de la droite (d) est donc $\overrightarrow{n}(5;-8)$.
Soit $M(x;y)$ un point du plan alors $\overrightarrow{CM}\left(x+\frac{7}{2};y-\frac{7}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} M \in (d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{n} \text{ et } \overrightarrow{CM} \text{ sont } colinéaires \\ &\Leftrightarrow 5\left(y-\frac{7}{2}\right)-(-8)\left(x+\frac{7}{2}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow 5y-\frac{35}{2}+8x+28=0 \\ &\Leftrightarrow 8x+5y+\frac{21}{2}=0 \end{aligned}$$

3. Déterminons les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et de la droite (AB). Elles sont solution du système :

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{rcl} 5x-8y+1 &=& 0 \\ 8x+5y+\dfrac{21}{2} &=& 0 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 5x-8y &=& -1 & (1) \\ 8x+5y &=& -\dfrac{21}{2} & (2) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 5x-8y &=& -1 & \\ -89y &=& \dfrac{89}{2} & 8(1)-5(2) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -\dfrac{1}{2} \\ 5x &=& 8y-1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -\frac{1}{2} \\ x &=& -1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Le point d'intersection des droites (AB) et (d) est donc $D\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$

Le point D est donc le milieu du segment $[CC']$. Ainsi

$$\begin{cases} -1 & = & \dfrac{x_{C'} - \dfrac{7}{2}}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & = & \dfrac{y_{C'} + \dfrac{7}{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 & = & x_{C'} - \dfrac{7}{2} \\ -1 & = & y_{C'} + \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} & = & \dfrac{3}{2} \\ y_{C'} & = & -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Donc le point C' a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$

Exercice 16 : Soit le vecteur $\overrightarrow{V}(2;1)$ et le point $M(4;3)$.

1. Ecrire une équation de la droite (D_1) passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{V}$. Calculer la distance de O à (D_1).
2. Déterminer une équation de la droite (D_2) passant par M et de vecteur normal $\overrightarrow{V}$.
3. Soit (D) la droite d'équation :
   $(m-3)x + (5-m)y + m - 1 = 0$ où m est un paramètre réel.
   a) Calculer m pour que (D) soit perpendiculaire à (D_1).
   b) Calculer m pour que (D) admette $\overrightarrow{V}$ comme vecteur normal.
   c) Calculer m pour que (D) soit perpendiculaire à l'axe des x.
4. Existe-t-il une valeur de m telle que (D) soit perpendiculaire à (D_2) ?

Solution :

1. $N(x;y)$ est un point quelquonque de (D_1) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{MN}(x-4; y-3)$ et $\overrightarrow{V}(2;1)$ ce qui nous ramène à dire que $\det(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{V}) = 0$; $\quad XY' - X'Y = 0$;
   $(x-4)(1) - 2(y-3) = 0$; $\quad$ soit $x - 2y + 2 = 0$ l'équation de (D_1).
   La distance de O à (d_1) est calculée par ce qui suit :

$$d(O,(D_1) = \frac{|ux_O + vy_O + w|}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{|x_O - 2y_O + 2|}{\sqrt{1+4}}$$
$$= \frac{|0-0+2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

2. $P(x;y)$ est un point quelquonque de (D_2) si et seulement si $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{V}=0$; avec $\overrightarrow{MP}(x-4;y-3)$ et $\overrightarrow{V}(2;1)$ alors on obtient $XX'+YY'=0$; $2(x-4)+y-3=0$; soit $2x+y-11=0$ l'équation de (D_2).
3. a) (D) est perpendiculaire à (D_1) si les vecteurs directeurs de (D) et (D_1) sont orthogonaux. avec $\overrightarrow{V}(2;1)$ est un vecteur directeur de (D_1) et $\overrightarrow{V}_{(D)}(m-5;m-3)$ est un vecteur directeur de (D). équivaut à dire $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{V}_{(D)}=0$; $XX'+YY'=0$; $2(m-5)+m-3=0$; $2m-10+m-3=0$; $3m-13=0$ soit $m=\dfrac{13}{3}$

   b) $\overrightarrow{V}$ est un vecteur normal pour (D) si les vecteurs $\overrightarrow{V}(2;1)$ et $\overrightarrow{N}_{(D)}(m-3;5-m)$ sont colinéaires équivaut à dire $\det(\overrightarrow{V};\overrightarrow{N}_{(D)})=0$; $XY'-X'Y=0$; $1(m-3)-2(5-m)=0$; quad $3m-13=0$ soit $m=\frac{13}{3}$.

   c) (D) est perpendiculaire à l'axe des x donc (D) est parallèle à l'axe des y ce qui donne $V=0$ alors $5-m=0$ soit $m=5$.
4. (D) est perpendiculaire à (D_2) équivaut à $\overrightarrow{V}_{(D)}.V_{(D_2)}=0$ avec $\overrightarrow{V}_D(m-5;m-3)$ est un vecteur directeur de (D) et $\overrightarrow{V}_{(D_2)}(-1;2)$ est un vecteur directeur de (D_2) ce qui donne $-1(m-5)+2(m-3)=0$; $m-1=0$ soit $m=1$. Alors il existe une valeur de m telle que (D) soit perpendiculaire à (D_2).

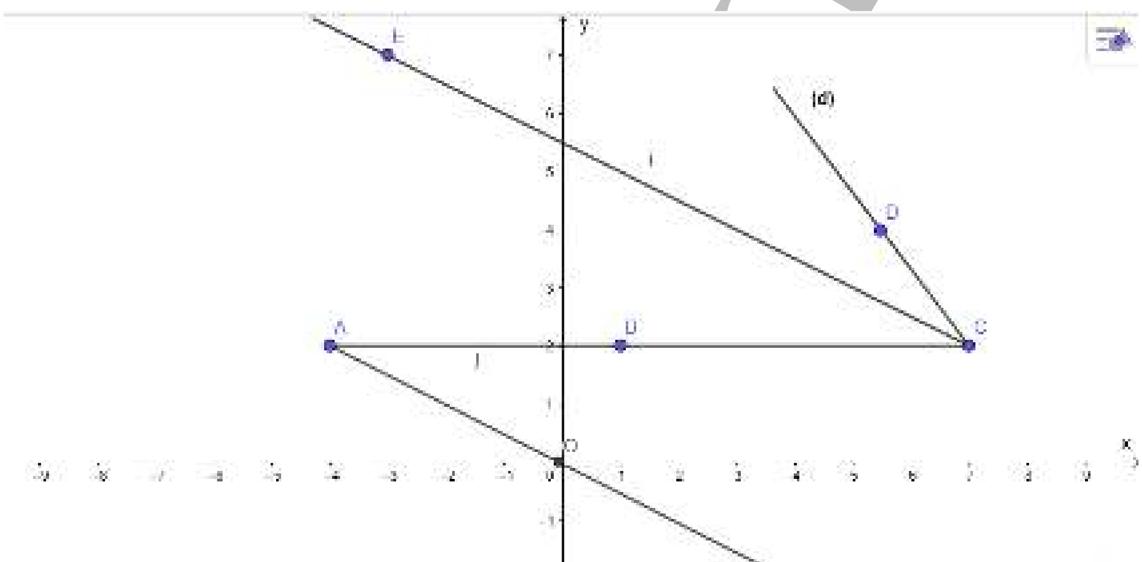
Exercice 17 : Dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$, on donne :

$A(-4;2)$, $B(1;2)$ et (d) : $\begin{cases} x = -3t+1 \\ y = 4t+10 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

1. Tracer un repère, placer les points A et B puis tracer (d).
2. On désigne par C le point de rencontre de (d) et de (AB). Calculer les coordonnées du point C.
3. Soit D un point de la droite (d) tel que $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=9$. Calculer les coordonnées du point D.
4. Montrer que le point $E(-3;7)$ appartient à la bissectrice de $\widehat{BCD}$.
5. Calculer une valeur approchée de cet angle.
6. Montrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$ est parallèle à la droite (OA). En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAO}$.

Solution :

1. Pour tracer la droite (d), il suffit de prendre deux valeurs de t et trouver l'abscisse et l'ordonnée correspondant.
   Pour $t = -1$, on trouve $x = -3 \times (-1) + 1 = 4$ et $y = 4 \times (-1) + 10 = 6$
   Pour $t = -2$, on trouve $x = 7$ et $y = 2$.
   Repère orthonormé :



2. On détermine l'équation de (AB) en remarquant que les points A et B ont le même ordonnée 2, donc l'équation de (AB) s'écrit $y = 2$.
   Les coordonnées du point C intersection de (d) et de (AB) vérifient le système suivant : $\begin{cases} x &= -3t+1 \\ y &= 4t+10 \\ y &= 2 \end{cases}$. En égalisant les y, on obtient $4t + 10 = 2$; $\quad 4t = -8$ soit $t = -\frac{8}{4} = -2$.
   Remplaçons t par sa valeur dans l'expression de x, on trouve que $x = -3t + 1 = -3 \times (-2) + 1 = 7$. Alors les coordonnées du point C sont $(7; 2)$.
3. Comme D est situé sur la droite (d) alors ses coordonnées vérifient les équations de (D) donc $x_D = -3t + 1$ et $y_D = 4t + 10$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$.
   De plus les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont données par : $\overrightarrow{CD}(-3t - 6; 4t + 8)$ et $\overrightarrow{CB}(-6; 0)$. Par ailleurs $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = 9$ équivaut à $-6(-3t - 6) + 0(4t + 8) = 9$; équivaut à $18t + 36 = 9$; $\quad 18t = -27$

soit $t = -\dfrac{27}{18} = \dfrac{-3}{2}$. Il s'ensuit que $x_D = -3t + 1 = -3 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) + 1 = \dfrac{9}{2} + \dfrac{2}{2} = \dfrac{11}{2}$ et $y_D = 4t + 10 = 4 \times \left(\dfrac{-3}{2}\right) + 10 = 4$
Par suite les coordonnées de D sont $\left(\dfrac{11}{2}; 4\right)$.

4. On sait les points B et C ont le même ordonnée 2 alors l'équation de (BC) s'écrit $y = 2$.
Déterminons l'équation de (CD) par ce qui suit :

$$\frac{y - y_C}{x - x_C} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$
$$\frac{y - 2}{x - 7} = \frac{4 - 2}{\dfrac{11}{2} - 7}$$
$$\frac{y - 2}{x - 7} = \frac{2}{\dfrac{-3}{2}}$$
$$\frac{y - 2}{x - 7} = 2 \times \frac{2}{-3} = -\frac{4}{3}$$
$$3y - 6 = -4x + 28$$
$$4x + 3y - 34 = 0$$

Le point E appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$ si et seulement si $d\,(E, (BC)) = d\,(E, (CD))$. En effet ;
$d\,(E, (BC)) = \dfrac{|ux_E + vy_E + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \dfrac{|7 - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 5$. De plus

$$d\,(E, (CD)) = \frac{|4x_E + 3y_E - 34|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|4(-3) + 3(7) - 34|}{5} = \frac{|-46 + 21|}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Ce qui montre que $d\,(E, (BC)) = d\,(E, (CD))$, par suite E appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$.

5. On sait que

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{BCD}) &= \frac{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CD}\|.\|\overrightarrow{CB}\|} \\ &= \frac{9}{\sqrt{\frac{9}{4}+4}.\sqrt{36}} = \frac{9}{\sqrt{\frac{25}{4}}\times 6} \\ &= \frac{9}{\frac{5}{2}\times 6} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Par suite $\widehat{BCD} \simeq 53°$

6. Comme E appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$, donc la demi-droite $[CE)$ n'est autre que la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$.
De plus $a_{(CE)} = \dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C} = \dfrac{7-2}{-3-7} = \dfrac{5}{-10} = -\dfrac{1}{2}$.
Egalement, on a $a_{(OA)} = \dfrac{y_A}{x_A} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$.
Ce qui prouve que $a_{(CE)} = a_{(OA)}$, il s'ensuit que la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$ est parallèle à la droite (OA).
Comme (CE) est parallèle à (OA) alors $\widehat{BAO} = \widehat{ECB}$ (angles alternes internes formés par les droites parallèles (CE) et (OA) et coupés par la sécante (AC)). Par ailleurs $\widehat{ECB} = \dfrac{\widehat{BCD}}{2} \simeq \dfrac{53}{2} \simeq 27°$.

Exercice 18 : Trois questions indépendantes.

1. ABC est un triangle équilatéral de côté a.
Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
Montrer que les droites (AC) et (EF) sont perpendiculaires.
2. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(m+1;5)$, $B(2m-3;m)$ et $C(7-m;m+1)$ où m est un paramètre réel.
Déterminer les valeurs de m pour que le triangle ABC soit inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$/
3. Soient A, B et C trois points non alignés tel que $AC = 2cm$.
Déterminer le lieu géométrique du point P sachant que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{CB} - 6$.

Solution :

1. Les droites (AC) et (FE) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{FE} = 0$. En effet

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}) \\
&= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}AC^2 \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}AC^2 \\
&= \frac{3}{2}CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB}) - AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC}) - \frac{1}{4}AC^2 \\
&= \frac{3}{2}a^2 \times \cos(60°) - a^2\cos(60°) - \frac{1}{4}a^2 \\
&= \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\
&= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0
\end{aligned}$$

Par suite (AC) est perpendiculaire à (FE).

2. On sait que ABC est inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle ABC est rectangle en A d'hypténuse $[BC]$ ce qui donne $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$. Par ailleurs $\overrightarrow{AB}(m-4; m-5)$ et $\overrightarrow{AC}(6-2m; m-4)$ il s'ensuit alors :

$$\begin{aligned}
&(6-2m)(m-4) + (m-4)(m-5) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ (m-4)(6-2m+m-5) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ (m-4)(-m+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ m-4 = 0 \quad \text{ou} \quad -m+1 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ m = 4 \qquad\quad m = 1
\end{aligned}$$

Alors les valeurs de m pour lesquelles le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$ sont : 1 et 4.

3. On sait que

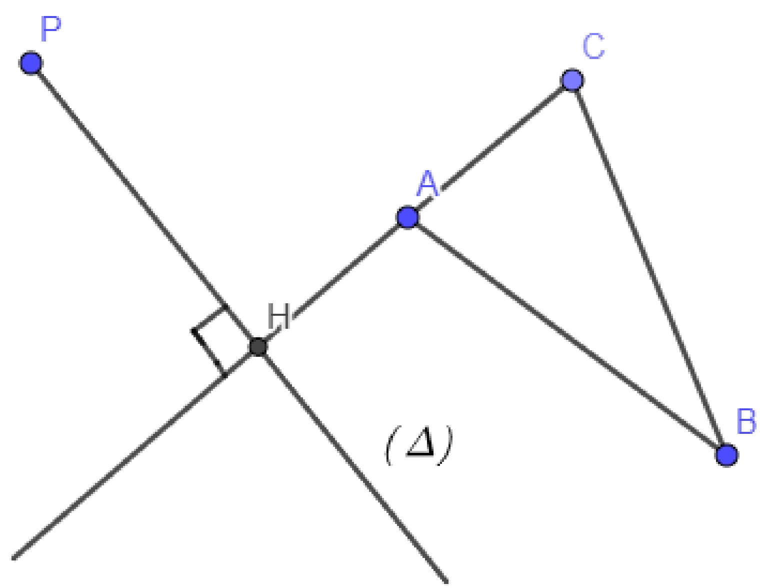
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{CB} = -6\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -6\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC} = -6
\end{aligned}$$

Soit H le projeté orthogonal de P sur (AC), il s'ensuit d'après le théorème de la projection :

$\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC} = -6$

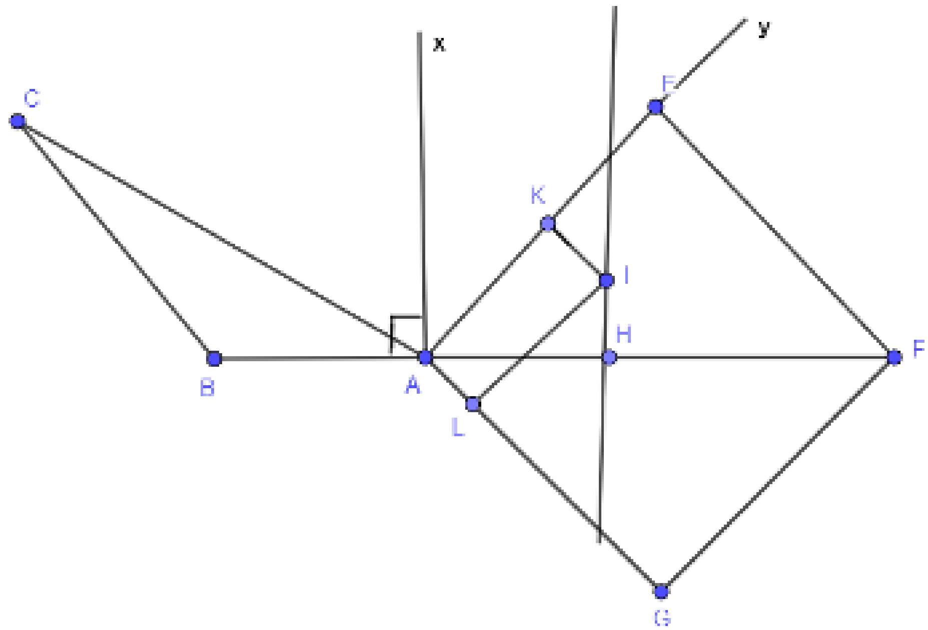
$\Leftrightarrow \overline{AH} \times \overline{AC} = -6$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de sens contraires avec $AH = 3$



Par suite, l'ensemble des points P est la droite (Δ) perpendiculaire à (AC) en H.

Exercice 18 : Dans la figure ci-dessous, on donne :



- ABC un triangle avec $BC = 5cm$, $CA = 7cm$ et $\widehat{CBA} = \dfrac{2\pi}{3}\,rad$.
- $[Ax)$ une demi-droite perpendiculaire à (AB) passant par A.
- E est un point tel que $\widehat{xAE} = \dfrac{\pi}{4}rad$ et $AE = 6cm$
- $AEFG$ un carré.
- Les points K, L et I tels que :
  - · K soit le milieu de $[AE]$.
  - · $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AG}$
  - · $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AK}$.

1. On pose $AB = x$. Montrer à l'aide du théorème d'Al-Kashi que $x = 3cm$
2. a. Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$.

   b. Montrer que les points B, A et F sont alignés.

   c. La parallèle à (Ax) passant par I coupe la droite (AB) en H. Calculer AH.

Solution de l'exercice :

1. D'après le théorème d'Al-Kashi on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos(\widehat{ABC}).$$

Ce qui donne $9 = x^2 + 25 - 2x \times 5\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Longrightarrow 49 = x^2 + 25 - 10x\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Longrightarrow 49 = x^2 + 25 - 10x\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$\Longrightarrow 49 = x^2 + 25 + 10x \times \frac{1}{2}; \quad 49 = x^2 + 25 + 5x$

$\Longrightarrow x^2 + 5x - 24 = 0; \quad \Longrightarrow \left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} - 24 = 0$

$\Longrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} = 0$

$\Longrightarrow \left(x + \frac{5}{2} - \frac{11}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{11}{2}\right) = 0$

$\Longrightarrow (x-3)(x+8) = 0 \quad \Longrightarrow x = 3$ (acceptable) ou $x = -8$ (à rejeter)

Par suite $x = 3cm$

2. a. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AK}).\overrightarrow{AB} \\
&= \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AK}\right).\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{4}AG \times AB\cos(\widehat{GAB}) + AK \times AB \times \cos(\widehat{BAK}) \\
&= \frac{1}{4} \times 6 \times 3 \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{9}{2}\left(-\cos(\frac{\pi}{4})\right) + 9\left(-\sin(\frac{\pi}{4})\right) \\
&= -\frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 9\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&- \frac{9}{4}\sqrt{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{-9\sqrt{2} - 18\sqrt{2}}{4} = \frac{-27\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

b. Soit T un point appartenant à la demi-droite $[Ax)$. On a

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AT})+(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})\\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\end{aligned}$$

Ce qui montre que les points B, A et F sont alignés.

c. On vient de montrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = -\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$
De plus H est le projeté orthogonal de I sur (AB) puisque $[Ax)$ est perpendiulaire à (AB) alors la parallèle à $[Ax)$ passant par I est également perpendiculaire à (AB) où H est le pied de la perpendiculaire.
D'après le théorème de la projection orthogonale on sait que

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = -AH\times AB$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&-AH\times 3 = -\frac{27\sqrt{2}}{4}\\ &-3AH = \frac{-27\sqrt{2}}{4}\\ &12AH = 27\sqrt{2}\\ &\text{soit } AH = \frac{27\sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Exercice 19 :
Soit un triangle ABC isocèle en A tel que $BC = 5cm$ et $AB = 3cm$.

a) Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$, puis $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

b) En déduire la longueur BH où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Solution :

1. D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned}
&AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos(\widehat{ABC})\\
&9 = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos(\widehat{ABC})\\
&9 = 9 + 25 - 30\cos(\widehat{ABC})\\
&9 = 34 - 30\cos(\widehat{ABC})\\
&30\cos(\widehat{ABC}) = 25\\
&\cos(\widehat{ABC}) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

De plus ;

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} &= \|BC\| \times \|BA\| \times \cos(\widehat{ABC})\\
&= 5 \times 3 \times \frac{5}{6} = \frac{25}{2}
\end{aligned}$$

2. Comme H est le projeté orthogonal de C sur (AB). En appliquant le théorème de la projection orthogonale on obtient :

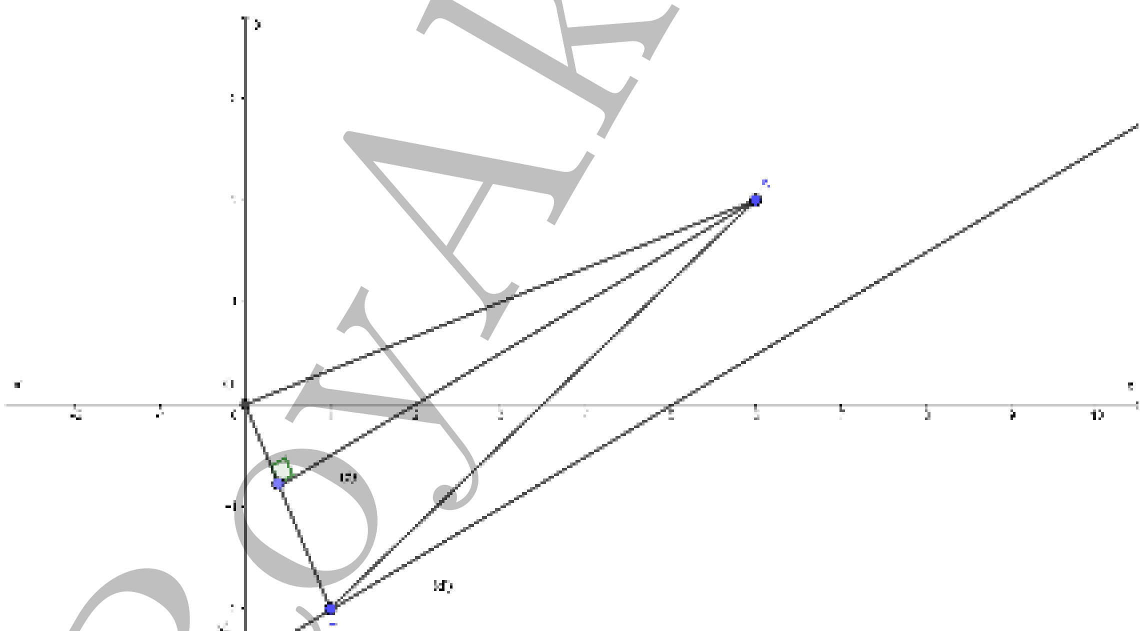
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overline{BH} \times \overline{BA}\\
&\Leftrightarrow \; BH \times BA = \frac{25}{2}\\
&\Leftrightarrow \; BH \times 3 = \frac{25}{2}\\
&\Leftrightarrow \; BH = \frac{25}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{25}{6} \simeq 4,16cm
\end{aligned}$$

Exercice 20 : Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, placer les points $A(6;2)$ et $E(1;-2)$.

1. Soit (d) la hauteur issue du sommet A dans le triangle AOE.
   Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) et vérifier qu'elle coupe l'axe $x'x$ au point B d'abscisse 2.
2. a) Calculer la distance du point E à la droite (AB)
   b) Calculer AB puis déduire l'aire du triangle EAB.
3. Calculer, arrondi au degré près, la mesure de l'angle $\widehat{BAE}$.

4. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d') passant par E et parallèle à la droite (d).
5. On considère la famille de droite (D_m) d'équation : $(m+1)x + y + m + 3 = 0$ où m est un paramètre réel.
   a) Démontrer que la famille de droite (D_m) passe par un point fixe F dont on déterminera ses coordonnées.
   b) Montrer que la droite (D_m) qui passe par le point $C(-2;1)$ est perpendiculaire à la droite $(d")$ dont son système d'équations paramétriques est $(d") : \begin{cases} x = 5+3t \\ y = t-7 \end{cases}$.

Solution :



1. $M(x;y)$ est un point quelquonque de (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OE} = 0$ avec $\overrightarrow{AM}(x-6;y-2)$ et $\overrightarrow{OE}(1;-2)$

$$\Leftrightarrow \; XX' + YY' = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-6)(1) + (y-2)(-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \; x - 6 - 2y + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2y - 2 = 0$$

Alors l'équation de la hauteur (d) issue de A dans le triangle AOE est $x - 2y - 2 = 0$.

Les coordonnées du point B intersection de (d) et $x'x$ vérifient le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} x-2y-2 & = & 0 \ (1) \\ y & = & 0 \ (2) \end{array}\right.$.
En remplacant y par sa valeur dans l'équation (1) on obtient $x-2=0$ soit $x=2$. Par suite (d) coupe l'axe $x'x$ au point B d'abscisse 2.

2. a) Comme A et B appartiennent à (d) alors la droite (d) est confondue avec (AB) admettant pour équation $x-2y-2=0$, on calcule par ce qui suit la distance du point E à la droite (AB).

$$\begin{aligned} d(E,(AB)) = d(E,(d)) &= \frac{|ux_E+vy_E+w|}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ &= \frac{|x_E-2y_E-2|}{\sqrt{1+4}} \\ &= \frac{|1-2(-2)-2|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|1+4-2|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

   b) On a $A(6;2)$ et $B(2;0)$ alors $\overrightarrow{AB}(-4;-2)$ ce qui donne

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

   L'aire du triangle AEB est donné par :

$$\begin{aligned} A_{AEB} &= \frac{b\times h}{2} = \frac{AB\times d(E,(AB))}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{\frac{6\times 5}{5}}{2} \\ &= \frac{30}{10} = 3u^2 \end{aligned}$$

3. On a $\overrightarrow{AE}(-5;-4)$ alors $AE = \|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$
$\overrightarrow{BE}(-1;-2)$ alors $BE = \|\overrightarrow{BE}\| = \sqrt{1+4}$.

En appliquant le théorème d'Al-Kashi on a

$$\begin{aligned}
&BE^2 = BA^2 + AE^2 - 2BA \times AE \times \cos(\widehat{BAE})\\
&5 = 20 + 41 - 2 \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{41} \times \cos(\widehat{BAE})\\
&5 = 61 - 4\sqrt{205}\cos(\widehat{BAE})\\
&4\sqrt{205}\cos(\widehat{BAE}) = 56\\
&\cos(\widehat{BAE}) = \frac{56}{4\sqrt{205}} \simeq 0,58\\
&\widehat{BAE} \simeq 11^\circ
\end{aligned}$$

4. $M(x;y)$ est un point quelquonque de (d') si et seulement si $\overrightarrow{EM} = t\overrightarrow{AB}$ ce qui donne $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$
   soit $\begin{cases} x &= -4t+1 \\ y &= -2t-2 \end{cases}$. C'est un système d'équations paramétriques de la droite (d') parallèle à (d) et passant par E.
5. a) $A(a;b)$ est un point fixe appartenant à (D_m) équivaut à

   $$\begin{aligned}
   &(m+1)a + b + m + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow\ ma + a + b + m + 3 = 0\\
   &\Leftrightarrow\ m(a+1) + a + b + 3 = 0
   \end{aligned}$$

   C'est un polynome identiquement nul, il faut que ses coefficients soient nuls ; on obtient le système suivant : $\begin{cases} a+1 &= 0 \ (1) \\ a+b+3 &= 0 \ (2) \end{cases}$.
   L'équation (1) donne $a+1=0$ soit $a=-1$.
   En remplacant a par sa valeur dans l'équation l'équation (2) on obtient $-1+b+3=0$; $\quad b+2=0$ soit $b=-2$. Par suite le point $A(-1;-2)$ est le point fixe appartennant à (D_m) pour tout $m \in \mathbb{R}$

   b) (D_m) passe par $C(-2;1)$ alors les coordonnées de C vérifient l'équation de (D_m) ce qui donne

   $$\begin{aligned}
   &(m+1)x_C + y_C + m + 3 = 0\\
   &\Longrightarrow\ (m+1)(-2) + 1 + m + 3 = 0\\
   &\Longrightarrow\ -2m - 2 + 1 + m + 3 = 0\\
   &\Longrightarrow\ -m + 2 = 0\\
   &\Longrightarrow\ m = 2
   \end{aligned}$$

Donc la droite (D_m) qui passe par le point $C(-2;1)$ est la droite (D_2) de vecteur directeur $\overrightarrow{v}_{(D_2)}(-1;-3)$.
Par ailleurs le vecteur directeur de la droite $(d")$ est $\overrightarrow{v}_{(d")}(3;1)$.
De plus (D_2) est perpendiculaire à $(d")$ si et seulement si $\overrightarrow{v}_{(D_2)}.\overrightarrow{v}_{(d")} = 0$.
En effet

$$\overrightarrow{v}_{(D_2)}.\overrightarrow{v}_{(d")} = XX' + YY' \quad = (-1)(3) + (3)(1) = -3 + 3 = 0$$

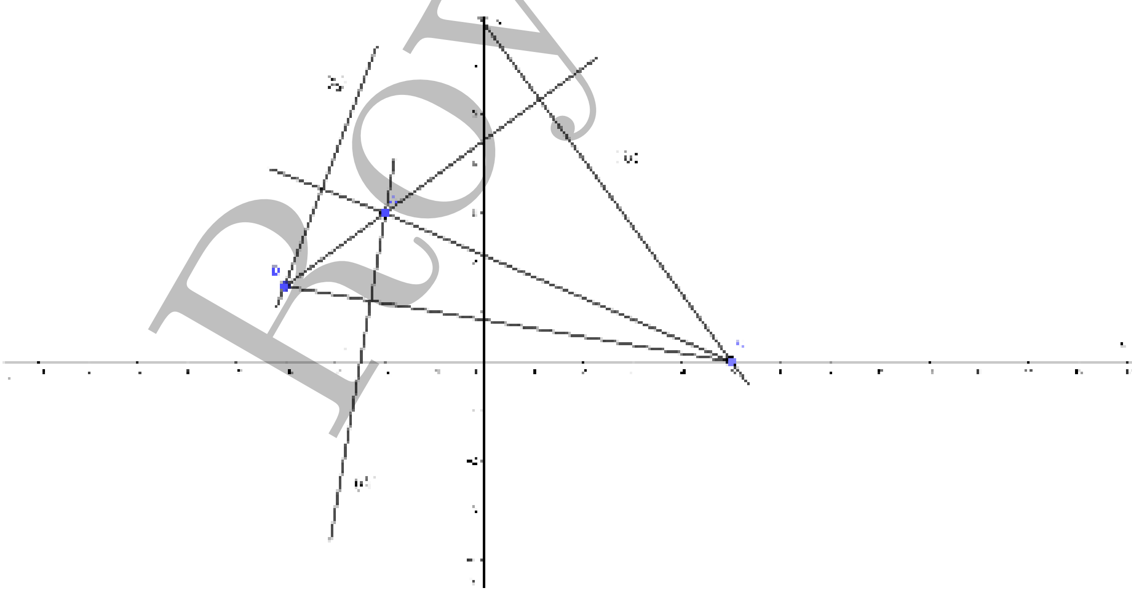
Par suite (D_2) est perpendiculaire à $(d")$ ce qui montre que la droite (D_m) passant par le point $C(-2;1)$ est perpendiculaire à la droite $(d")$.

Exercice 21 : On considère le triangle ABC dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que

$$A(-2;3), \quad B(-4;\frac{3}{2}), \quad C(5;0)$$

1. Faire une figure
2. Ecrire une équation de la hauteur (d_1) issue de A.
3. Ecrire une équation de la hauteur (d_2) issue de B.
4. Calculer les coordonnées du point H orthocentre du triangle ABC.
5. Vérifier que H appartient à la hauteur (d_3) issue de C.
6. Calculer la distance du point I milieu de $[AB]$ à (D_1).

Solution :



1. Soit $M(x,y)$ un point quelquonque de (d_1), alors $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$ avec $\overrightarrow{AM}(x+2; y-3)$ et $\overrightarrow{BC}(9; -\frac{3}{2})$.
   L'égalité $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$ donne :
   $$\begin{aligned} &9(x+2) - \frac{3}{2}(y-3) = 0, \quad 9x + 18 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{2} = 0 \\ &9x - \frac{3}{2}y + \frac{45}{2} = 0; \quad 18x - 3y + 45 = 0 \\ &6x - y + 15 = 0 \end{aligned}$$
   L'équation de (d_1) est alors $6x - y + 15 = 0$
2. Soit $N(x,y)$ un point quelquonque de (d_2), alors $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AC} = 0$ avec $\overrightarrow{BN}(x+4; y-\frac{3}{2})$ et $\overrightarrow{AC}(7; -3)$.
   L'égalité $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AC}$ donne :
   $$\begin{aligned} &7(x+4) - 3\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0, \quad 7x + 28 - 3y + \frac{9}{2} = 0 \\ &7x - 3y + \frac{65}{2} = 0, \quad 14x - 6y + 65 = 0 \end{aligned}$$
   L'équation de (d_2) est alors $14x - 6y + 65 = 0$
3. Le point H étant l'intersection de (d_1) et (d_2), ses coordonnées vérifient le système suivant :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} 6x - y + 15 &=& 0 \ (1) \\ 14x - 6y + 65 &=& 0 \ (2) \end{array} \right.$$
   .
   Multipliosns l'équation (1) par (-6), on obtient :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} -36x + 6y - 90 &=& 0 \ (1) \\ 14x - 6y + 65 &=& 0 \ (2) \end{array} \right.$$
   .
   Ajoutons les deux équations membre à membre, on obtient :
   $$-22x - 25 = 0 \quad \text{soit} \quad x = -\frac{25}{22}$$
   .

Remplacons x par sa valeur dans l'équation (1), on obtient :

$$6\left(\frac{-25}{22}\right) - y + 15 = 0; \quad -\frac{75}{11} - y + 15 = 0$$
$$y = \frac{-75}{11} + 15 = \frac{-75}{11} + \frac{165}{11} = \frac{90}{11}$$

Par suite $H\left(\frac{-25}{22}; \frac{90}{11}\right)$.

4. H appartient à la hauteur (d_3) si (HC) est perpendiculaire à (AB) ou $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$. En effet, $\overrightarrow{HC}\left(\frac{135}{22}; \frac{-90}{11}\right)$ et $\overrightarrow{AB}(-2; -\frac{3}{2})$. De plus

$$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = \frac{135}{22} \times (-2) - \frac{90}{11} \times \left(\frac{-3}{2}\right)$$
$$= -\frac{135}{11} + \frac{135}{11} = 0$$

Ce qui montre que H appartient à (d_3) et H est l'orthocentre du triangle ABC.

5. Le point I milieu de $[AB]$ a pour coordonées $\left(-3; \frac{9}{4}\right)$.
La distance du point I à (d_1) est donnée par

$$d(I,(d_1)) = \frac{|ux_I + vy_I + w|}{\sqrt{u^2+v^2}}$$
$$= \frac{\left|6(-3) - 1 \times \frac{9}{4} + 15\right|}{\sqrt{36+1}}$$
$$= \frac{\left|-3 - \frac{9}{4}\right|}{\sqrt{37}} = \frac{21}{4\sqrt{37}}u$$

Exercice 22 : On donne dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ les points $A(0;1)$, $B(4;4)$ et $C\left(\frac{5}{2}; 7\right)$.
Trouver les équations des bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{BAC}$.

Solution : Trouvons les équations des droites (AB) et (AC).
Soit $M(x;y)$ un point quelquonque de (AB) alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{AM}(x; y-1)$ et $\overrightarrow{AB}(4;3)$ ce qui donne $x \times 3 - 4(y-1) = 0$ ou

$3x - 4y + 4 = 0$.
Par suite l'équation de (AB) est $3x - 4y + 4 = 0$.
Soit $N(x; y)$ un point quelquonque de (AC) alors $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{AN}(x; y-1)$ et $\overrightarrow{AC}\left(\frac{5}{2}; 6\right)$ ce qui donne $x \times 6 - \frac{5}{2}(y-1) = 0$ ou $12x - 5y + 5 = 0$.
Par suite l'équation de (AC) est $12x - 5y + 5 = 0$.
Si $P(x; y)$ est un point quelquonque de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ on a

$$d\left[P, (AB)\right] = d\left[P, (AC)\right]$$

D'où :

$$\frac{|3x - 4y + 4|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|12x - 5y + 5|}{\sqrt{144+25}}.$$

Alors

$$13\,|3x - 4y + 4| = 5\,|12x - 5y + 5|$$

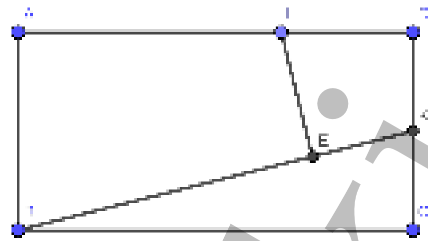
La première bissectrice a pour équation :

$$\begin{aligned} &13(3x - 4y + 4) = 5(12x - 5y + 5) \\ &39x - 52y + 52 = 60x - 25y + 25 \\ &21x + 27y - 27 = 0, \text{ soit } 7x - 9y - 9 = 0. \end{aligned}.$$

La deuxième bissectrice a pour équation :

$$\begin{aligned} &13(3x - 4y + 4) = -5(12x - 5y + 5) \\ &39x - 52y + 52 = -60x + 25y - 25 \\ &99x - 77y + 77 = 0, \text{ soit } 9x - 7y + 7 = 0 \end{aligned}$$

Exercice 23 : Dans la figure ci-dessous :



- $ABCD$ est un rectangle de côté $BC = 6cm$ et $AB = 4cm$.
- K est le milieu de $[CD]$ et L est un point de $[AD]$ tel que $AL = a\,cm$.
- E est le projeté orthogonal de L sur (BK).

<u>Partie A :</u>

1. Reproduire la figure qui sera complétée à la suite de l'exercice.
2. Après avoir décomposé les vecteurs $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{KL}$. Montrer que $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KL} = 32 - 6a$.
3. Calculer $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KL}$ en utilisant le projeté orthogonal et en déduire la valeur de a si $KE = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.
4. On considère que $a = 4cm$ dans la suite de l'exercice.
   Montrer que $\cos(\widehat{LKB}) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

<u>Partie B :</u>

On considère le plan rapporté au repère $(B, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{i} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{j} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. N est un point du segement $[BC]$ tel que $BN = m$.

1. Montrer que $m^2 - 6m + 16 = (m-3)^2 + 7$.
2. Prouver que le repère $(B, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est orthonormé.
3. a. Trouver les coordonnées des points : B, A, L, D, K et C.
   b. Calculer en fonction de m le produit scalaire $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{ND}$.
   c. Montrer que l'angle $\widehat{AND}$ n'est jamais droit.

<u>Partie C :</u> Dans cette partie, on suppose que $x_N = \dfrac{8}{3}$.

1. Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (LN) est $3x - y - 8 = 0$.

2. Soit (d) la droite d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 5t \\ y & = & 3t \end{array}\right.$.

   a. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de (LN) et (d).

   b. Placer le point G puis montrer que G est le centre de gravité du triangle KBL.

3. a. Calculer les coordonnées de S le quatrième sommet du parallélogramme $LKBS$.

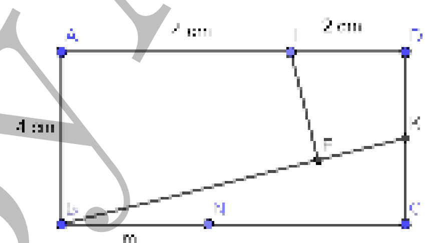
   b. Soit S' le symétrique de S par rapport à B.
   Montrer que L, G et S' sont alignés.

4. a. Trouver une équation cartésienne de la droite (BK) et en déduire la longueur de LE

   b. Calculer l'aire du parallélogramme $KLSB$

Solution de l'exercice :
<u>Partie A</u> :

1. Figure



2. D'après la relation de Chasles on a $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DL}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KL} &= \left(\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB}\right).\left(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DL}\right) \\ &= \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DL} \end{aligned}$$

Or les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KD}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraires ce qui donne $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD} = -KC \times KD$. De plus K est le milieu de $[CD]$ donc $KC = KD = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{4}{2} = 2cm$, il en résulte que

$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD} = -4$.
D'autre part les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{DL}$ sont orthogonaux alors $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{DL} = 0$.
En outre les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{KD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{KD} = 0$.
Enfin les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DL}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DL} = CB \times DL$ avec $CB = 6cm$ et $DL = (6-a)cm$ ce qui donne $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DL} = 6(6-a)$.
Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KL} &= -4 + 6(6-a)\\ &= -4 + 36 - 6a\\ &= 32 - 6a \;\; CQFD\end{aligned}$$

3. Comme E est le projeté orthogonal de L sur (BK) alors en appliquant le théorème de la projection orthogonale on obtient :

$$\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KL} = \overline{KB}.\overline{KE} = KB \times KE$$

Par ailleurs $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KL} = 32 - 6a$ d'après la question 2. Il en résulte que $KB \times KE = 32 - 6a$.
Pour calculer la longueur KB, on remarque que le triangle KCB est rectangle en K alors d'après le théorème de pythagore on a $KB^2 = KC^2 + CB^2$ ce qui donne $KB^2 = 4 + 36 = 40$ soit $KB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\,cm$.
D'après la relation trouvée : $KB \times KE = 32 - 6a$, on retrouve que :

$$\begin{aligned}&2\sqrt{10} \times \frac{2\sqrt{10}}{5} = 32 - 6a\\ &\Longrightarrow \;\; \frac{4 \times 10}{5} = 32 - 6a \;\Longrightarrow\; 8 = 32 - 6a\\ &\Longrightarrow\; 6a = 32 - 8 \;\Longrightarrow\; 6a = 24\\ &\Longrightarrow\; a = \frac{24}{6} = 4\end{aligned}$$

Par suite $a = 4\ cm$

4. Pour $a = 4cm$, on trouve que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KL} &= 32 - 6a\\ &= 32 - 6 \times 4 = 32 - 24 = 8\end{aligned}$$

On a LDK est un triangle rectangle en D alors d'après le théorème de pythagore : $LK^2 = LD^2 + DK^2 = 4 + 4 = 8$ soit $LK = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ cm$.
D'autre part

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{LKB}) &= \frac{\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KL}}{\|\overrightarrow{KB}\|.\|\overrightarrow{KL}\|}\\ &= \frac{8}{2\sqrt{10}\times 2\sqrt{2}} = \frac{8}{4\sqrt{20}}\\ &= \frac{8}{4\times 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Par suite $\cos(\widehat{LKB}) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Partie B

1. On a $(m-3)^2 + 7 = m^2 - 6m + 9 + 7 = m^2 - 6m + 16$. Par suite

$$m^2 - 6m + 16 = (m-3)^2 + 7$$

2. On a $\left(B, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé si et seulement si $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\|$ et $\overrightarrow{i}$ est orthogonal à $\overrightarrow{j}$. En effet

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{i}\right\| &= \left\|\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{6}\times 6 = 1\\ \left\|\overrightarrow{j}\right\| &= \left\|\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\right\| = \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \frac{1}{4}\times 4 = 1\end{aligned}$$

Par suite $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\|$
De plus on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} &= \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}\right).\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\right) = \left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}\\ &= \frac{1}{24}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \frac{1}{24}\times 0 = 0 \text{ car } \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{BA} \text{ sont orthogoanaux}\end{aligned}$$

Ce qui prouve que le repère $\left(B, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est orthonormé.

3. a. Dans le repère $\left(B, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ les coordonnées des points B, A, L, D, K et C sont les suivantes : $B(0;0)$ car le point B est l'origine du repère. $A(0;4)$; $L(4;4)$, $D(6;4)$, $K(6;2)$ et $C(6;0)$.

b. D'après la relation de Chasles on a $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD}$, donc
$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{ND} &= \left(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA}\right).\left(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD}\right)\\ &= \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{NC}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens opposés donc $\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC} = -NB \times NC$, par suite $\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC} = -m(6-m)$.
De plus $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs orthogonaux donc $\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{CD} = 0$.
Egalement $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{NC}$ sont deux vecteurs orthogonaux alors $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{NC} = 0$.
Par ailleurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} = BA \times CD = 4 \times 4 = 16$

Enfin on retrouve que
$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{ND} &= -m(6-m) + 16\\ &= -6m + m^2 + 16 = m^2 - 6m + 16\end{aligned}$$

4. Pour montrer que $\widehat{AND}$ n'est pas droit, on résonne par absurde.
Supposons que l'angle $\widehat{AND}$ est droit alors $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{ND} = 0$ ce qui donne $m^2 - 6m + 16 = 0$ or d'après la question 1 de la partie B on a
$$m^2 - 6m + 16 = (m-3)^2 + 7.$$
Il s'ensuit que $(m-3)^2 + 7 = 0$ ce qui est impossible par suite l'angle $\widehat{AND}$ n'est pas un angle droit.

Partie C :

1. $M(x;y)$ est un point quelquonque de (LN) alors les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{LN}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{LM}(x-4;y-4)$ et $\overrightarrow{LN}\left(-\frac{4}{3};4\right)$ donc $det\left(\overrightarrow{LM},\overrightarrow{LN}\right) = 0$ ce qui donne
$$\begin{aligned}&-4(x-4) + \frac{4}{3}(y-4) = 0\\ &-4x + 16 + \frac{4}{3}y - \frac{16}{3} = 0\\ &-12x + 48 + 4y - 16 = 0\\ &-12x + 4y + 32 = 0\\ &12x - 4y - 32 = 0\\ &\text{soit } 3x - y - 8 = 0\end{aligned}$$
Donc l'équation de la droite (LN) est donnée par $3x - y - 8 = 0$.

2. Les coordonnées du point G intersection de (LN) et (d) vérifient le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y-8 & = & 0\ (1) \\ x & = & 5t\ (2) \\ y & = & 3t\ (3) \end{array}\right.$$
Remplacons x et y par leurs expressions dans (1) on obtient :
$3(5t)-3t-8=0$
$15t-3t-8=0$
$12t=8$ soit $t=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$.
L'équation (2) donne $x=5\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$.
L'équation (3) donne $y=3\times\dfrac{2}{3}=2$
Par suite les coordonnées de G sont $\left(\dfrac{10}{3};2\right)$.
G est le centre de gravité du triangle KBL si et seulement si
$$x_G=\frac{x_K+x_B+x_L}{3} \quad \text{et} \quad y_G=\frac{y_K+y_B+y_L}{3}$$
En effet $\dfrac{x_K+x_B+x_L}{3}=\dfrac{6+0+4}{3}=\dfrac{10}{3}=x_G$.
De plus $\dfrac{y_K+y_B+y_L}{3}=\dfrac{2+0+4}{3}=\dfrac{6}{3}=2=y_G$
On en conclut que G est le centre de gravité du triangle KBL.
3. a. On a S est le quatrième sommet du parallélogramme $LKBS$ équivaut à dire $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{BS}$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X_{\overrightarrow{KL}} & = & X_{\overrightarrow{BS}} \\ Y_{\overrightarrow{KL}} & = & Y_{\overrightarrow{BS}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_L-x_K & = & x_S-x_B \\ y_L-y_K & = & y_S-y_B \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4-6 & = & x_S-0 \\ 4-2 & = & y_S-0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_S & = & -2 \\ y_S & = & 2 \end{array}\right.$$
Par suite $S(-2;2)$.

b. On a S' est le symétrique de S par rapport à B équivaut à B milieu de $[SS']$.
$$\Leftrightarrow\ x_B=\frac{x_S+x_{S'}}{2} \qquad \text{et} \qquad y_B=\frac{y_S+y_{S'}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ 0=\frac{-2+x_{S'}}{2} \qquad\qquad 0=\frac{2+y_{S'}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ x_{S'}=2 \qquad\qquad y_{S'}=-2$$

Par suite $S'(2;-2)$.
Les points L, G et S' sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{LS'}$ sont colinéaires.
En effet $\overrightarrow{LG}\left(-\dfrac{2}{3};0\right)$ et $\overrightarrow{LS'}(-2;-6)$.
De plus $\dfrac{X_{\overrightarrow{LG}}}{X_{\overrightarrow{LS'}}} = \dfrac{-\frac{2}{3}}{-2} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{Y_{\overrightarrow{LG}}}{Y_{\overrightarrow{LS'}}} = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3}$
Ce qui prouve que $\dfrac{X_{\overrightarrow{LG}}}{X_{\overrightarrow{LS'}}} = \dfrac{Y_{\overrightarrow{LG}}}{Y_{\overrightarrow{LS'}}}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{LS'}$ sont colinéaires et ayant un point commun alors les points L, Get S' sont alignés.

4. L'équation de (BK) est de la forme $y = ax$ car elle passe par l'origine O.
   Par ailleurs $a = \dfrac{y_K}{x_K} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ donc l'équation de (BK) s'écrit $y = \dfrac{1}{3}x$ alors l'équation cartésienne de (BK) est $3x - y = 0$.
   Comme E est le projeté orthogonal de L sur (BK) alors LE représente la distance de L à la droite (BK) donc

$$\begin{aligned} LE = d\left[L,(BK)\right] &= \frac{|3x_L - y_L|}{\sqrt{9+1}} \\ &= \frac{|3\times 4 - 4|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{8\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5}u \end{aligned}$$

5. L'aire du parallélogramme $KLSB$ est donné par :

$$A_{KLSB} = baxe \times hauteur = BK \times LE$$

   Par ailleurs $\overrightarrow{BK}(6;2)$ donc $BK = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\,u$.
   Par suite $A_{KLSB} = 2\sqrt{10} \times \dfrac{4\sqrt{10}}{5} = \dfrac{8\times 10}{5} = 16u^2$