مدرسة التربية الحديثة

Maths: théorème de milieux

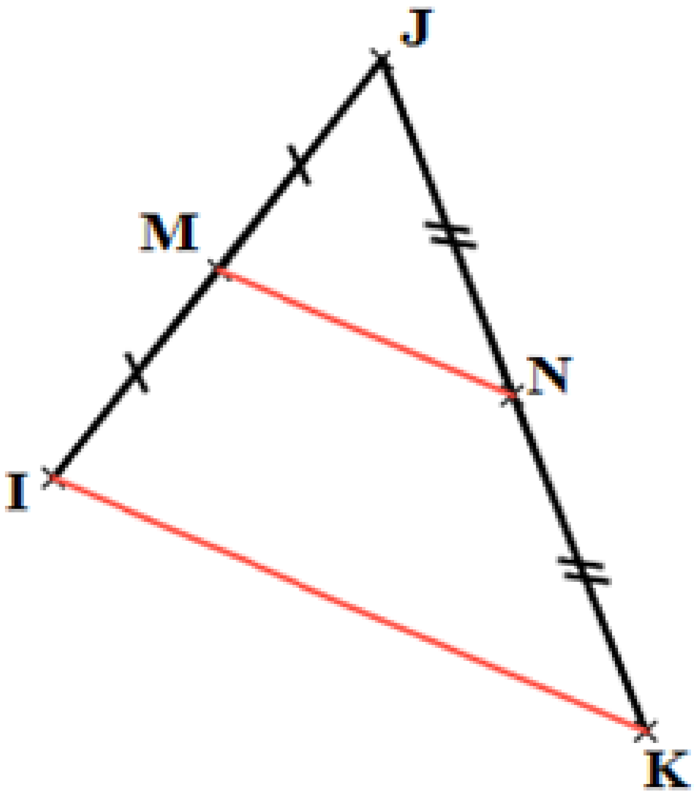
Classe :EB8 A,B,C et D

Mardi 13 avril 2021

Préparée par :l'enseignante Hala Sourani et M.Hayssam Osman

De milieu vers le parallélisme

M, N les milieux de [JI] et [JK]

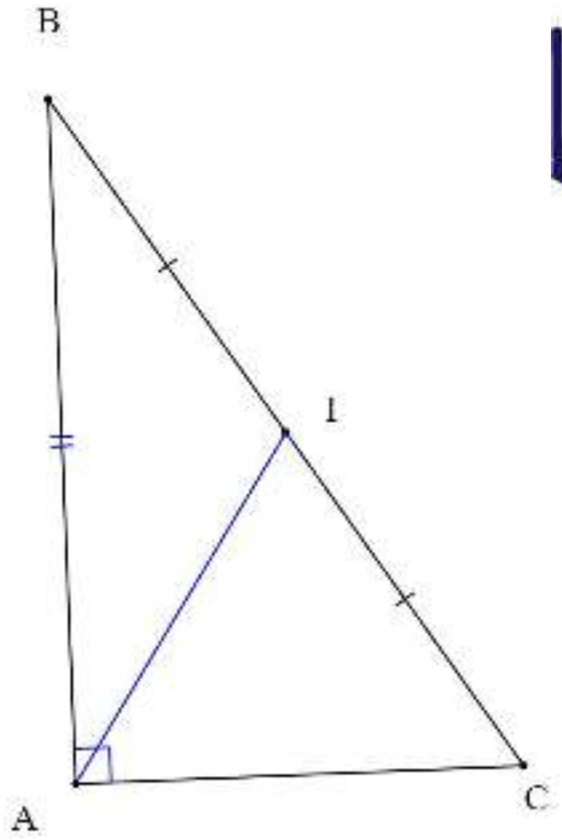


D’après le théorème de milieu dans le triangle IJK

$$MN = \frac{IK}{2}$$

$$(MN) \mathbin{/\!/} (IK)$$

l’hypoténuse
c’est le coté opposé à l’angle droit.

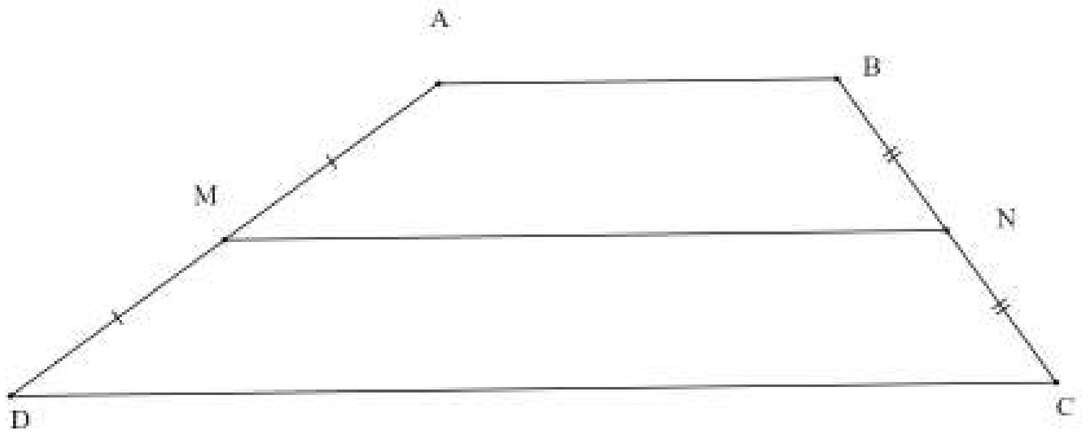


D’où dans un triangle rectangle la médiane relative à l’hypoténuse vaut la moitié de l’hypoténuse.

Dans un trapèze, le segment joignant les milieux des côtés non parallèles est parallèle aux deux bases et est égal à leur demi-somme.

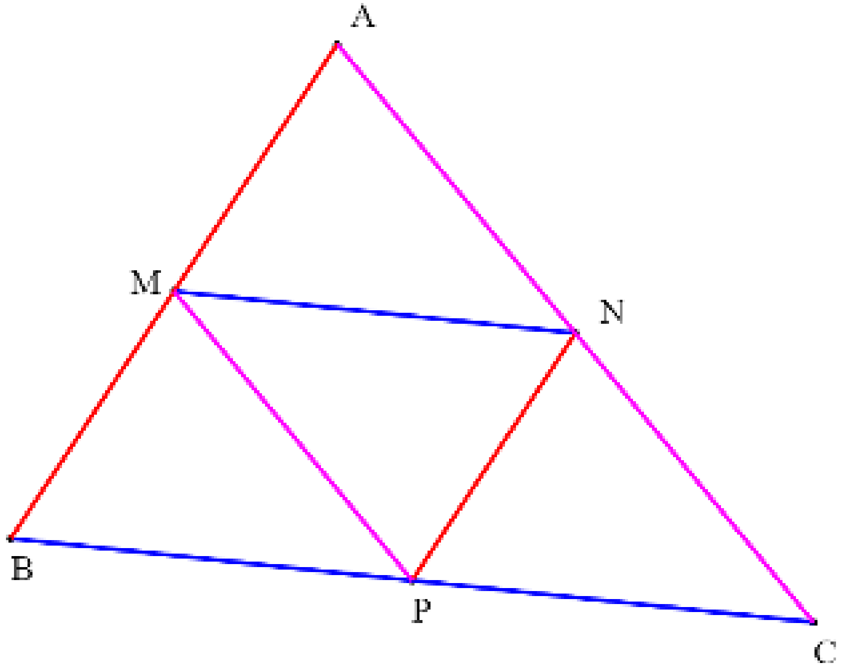
(MN)//(AB)//(DC)

Et MN=$\frac{AB+DC}{2}$



Solution supplémentaires

M, N et *P* sont les milieux respectifs des côtés [*AB*], [*AC*] et [*BC*] d'un triangle *ABC*.
Démontre que le périmètre du triangle *MNP* vaut la moitié de celui du triangle *ABC*.



Périmètre de ABC=AB+BC+AC

Périmètre de MNP=MN+MP+NP

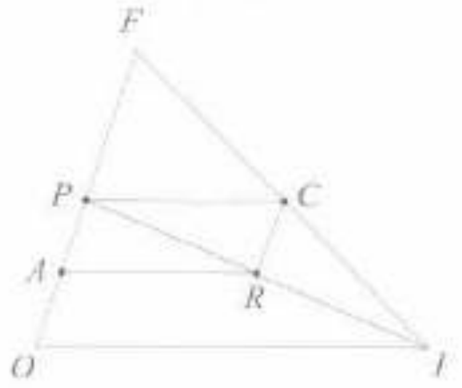
Or MN=$\frac{BC}{2}$; NP=$\frac{AB}{2}$ $et\ MP = \frac{AC}{2}$

Périmètre de MNP=MN+MP+NP

$$= \frac{BC}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2}$$

$$= \frac{BC+AB+AC}{2} = \frac{\text{Périmètre } de\ ABC}{2}$$

4. Dans la figure ci-dessous, P est le milieu de $[FO]$, A le milieu de $[PO]$, R le milieu de $[PI]$ et C le milieu de $[FI]$.



Démontre que $PARC$ est un parallélogramme.

<u>Dans le triangle FOI</u>

On a:

- P milieu de[FO]
- C milieu de [FI]

Donc d’après le théorème de milieu

PC=$\frac{OI}{2}$ et (PC)//(OI)

<u>Dans le triangle POI</u>

On a:

- A milieu de[PO]
- R milieu de [PI]

Donc d’après le théorème de milieu

AR=$\frac{OI}{2}$ et (AR)//(OI)

D’où dans le quadrilatère PCRA on a

PC=AR=OI

Et (PC)//(AR)//(OI)

Donc PCRA est parallélogramme comme ayant deux cotes opposées parallèles et égaux

5. Soit un triangle SOL, E le milieu de $[SO]$, F le milieu de $[SL]$, G le point de concours de $[OF]$ et de $[LE]$ et K le symétrique de G par rapport à E.

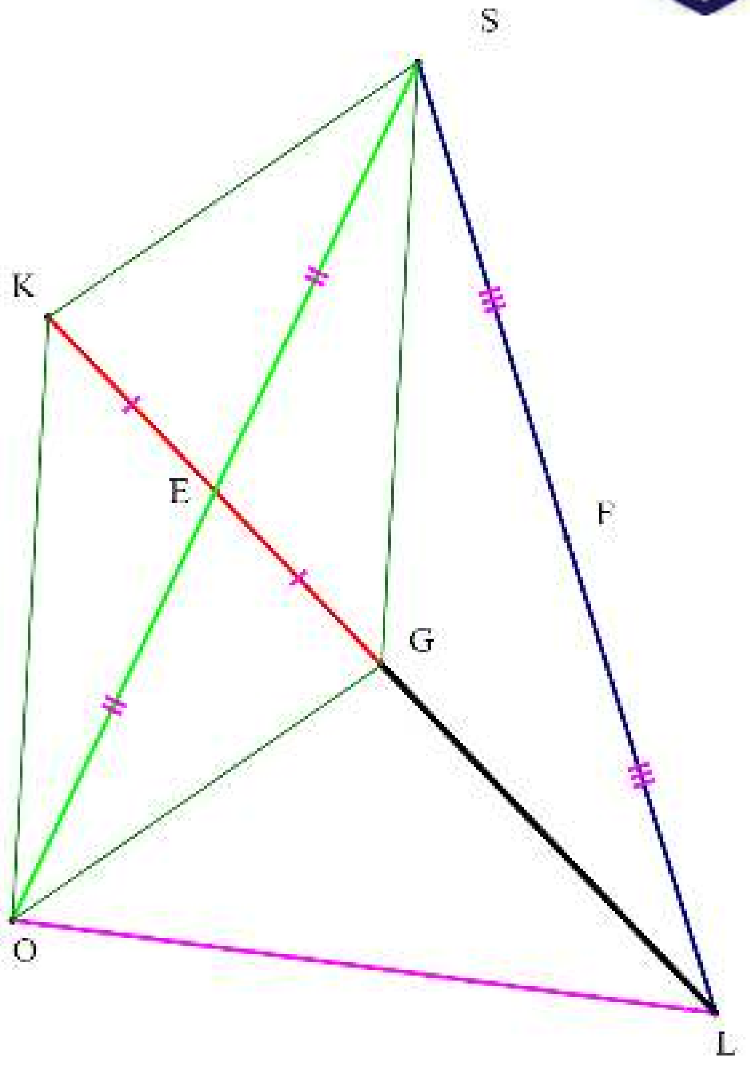
a) Quelle est la nature de $OGSK$? Justifie ta réponse.

b) Démontre que G est le milieu de $[LK]$. Déduis-en que $LG = 2GE$.

5. Soit un triangle SOL, E le milieu de $[SO]$, F le milieu de $[SL]$, G le point de concours de $[OF]$ et de $[LE]$ et K le symétrique de G par rapport à E.

a) Quelle est la nature de $OGSK$? Justifie ta réponse.

b) Démontre que G est le milieu de $[LK]$. Déduis-en que $LG = 2GE$.



a)

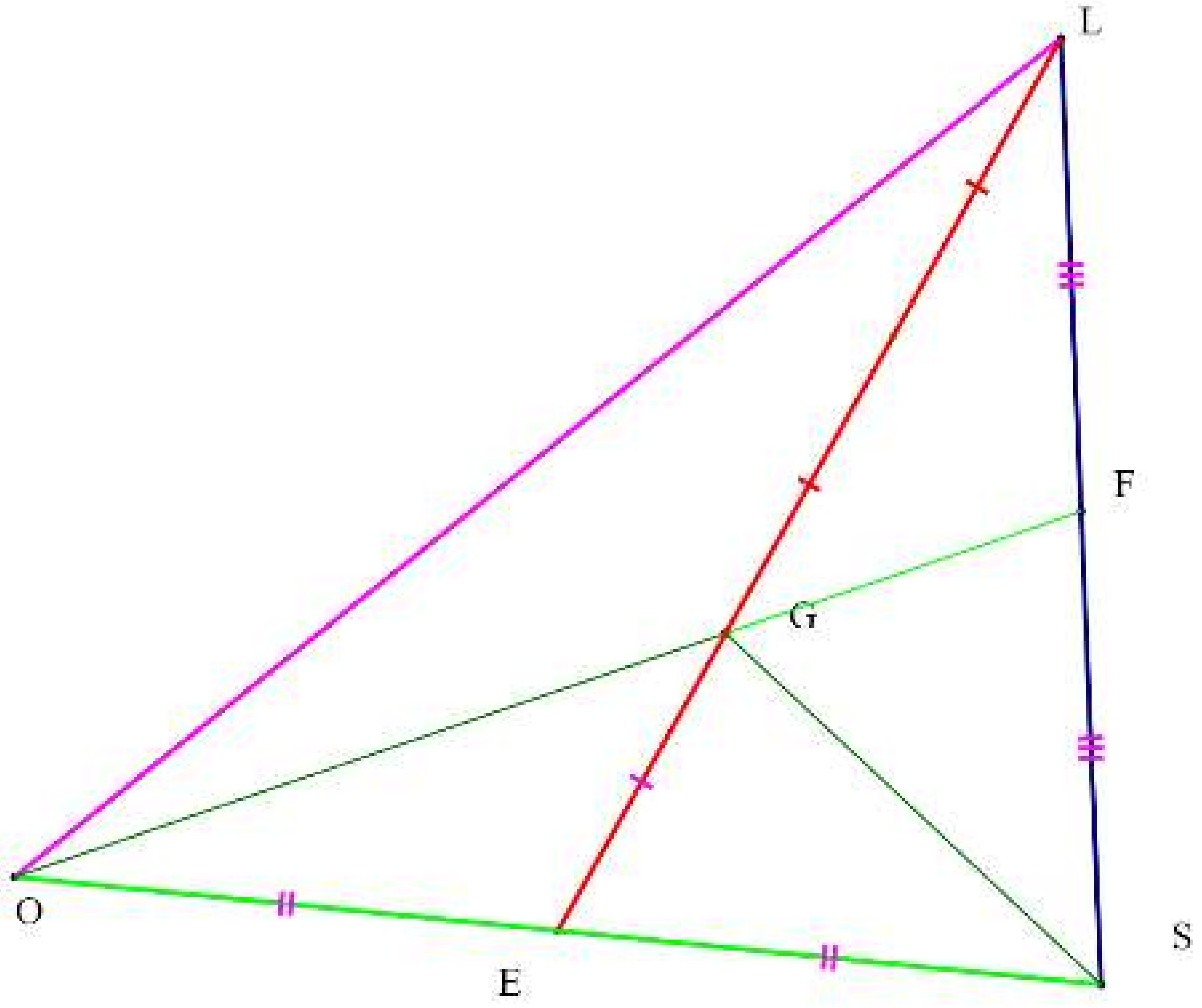
- E milieu de [SO] (donné)
- E milieu de [GK] (cause symétrie)

Donc SGOK est un parallélogramme comme ayant
ses diagonales [KG] et [SO] se coupent en leur milieu E

b) Dans le triangle LKS on a

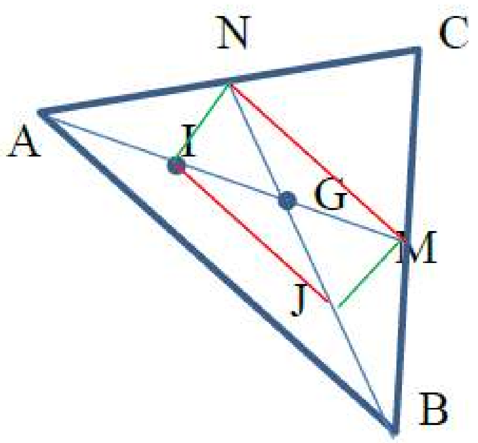
- F milieu de [LS]
- (FG)//(KS) (SGOK est un parallélogramme déjà démontré)

Donc d’après la réciproque de théorème de milieu
G sera le milieu de [LK]
D’où LG=GK=2 GE.


L
F
G
O
E
S

Théorème du centre de gravité d'un triangle.

Activité :



Dans le triangle ABC on a :
- [AM] médiane relative à [BC].
- [BN] médiane relative à [AC]
- G est le centre de gravité du triangle ABC.
- I milieu de [AG].
- J milieu de [BG].

1) Comparer NM et AB

Dans le triangle ABC on a : $\left.\begin{array}{l}\text{N milieu de [AC]}\\ \text{M milieu de [BC]}\end{array}\right\}$ alors (NM) // (AB) et $NM = \frac{AB}{2}$

D'après **<u>le théorème des milieux</u> : dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième et vaut sa moitié.**

2) Comparer **IJ et AB**

Dans le triangle AGB on a : I milieu de [AG] alors (IJ) // (AB)

J milieu de [BG] et $IJ = \frac{AB}{2}$

D'après le théorème des milieux.

3) Montrer que INMJ est un parallélogramme.

On a (IJ) // (AB) et (NM) // (AB) alors (IJ) // (NM) et $IJ = NM = \frac{AB}{2}$

donc INMJ est un parallélogramme car il a deux côtés opposés parallèles et égaux.

Dans le parallélogramme, les diagonales [IM] et [JN] se coupent en leur milieu G.

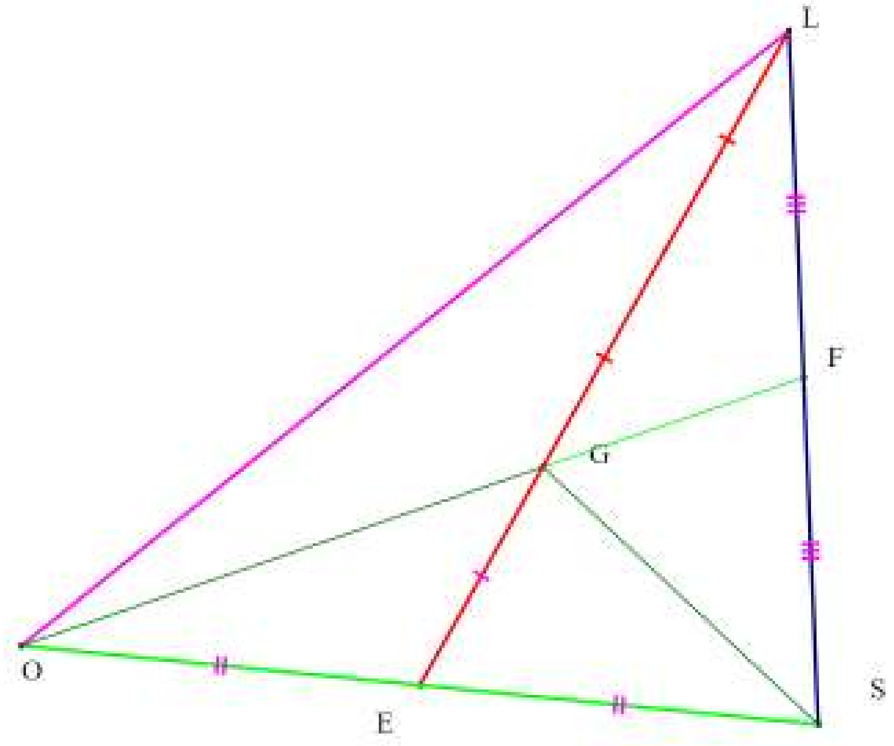
Donc $AI = IG = GM = \frac{1}{3}AM$ donc la médiane [AM] est partagée en trois parties égales.

D'où : $AG = \frac{2}{3}AM$; $GM = \frac{1}{3}AM$; $AG = 2\,GM$

De même, la médiane [BN] est partagée en trois parties égales

$GN = GJ = BJ = \frac{1}{3}BN$

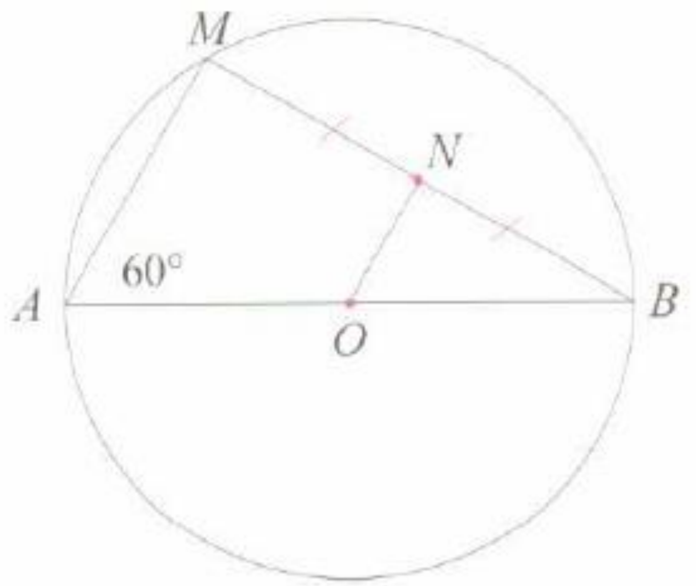
D'où : $BG = \frac{2}{3}BN$; $GN = \frac{1}{3}BN$; $BG = 2\,GN$



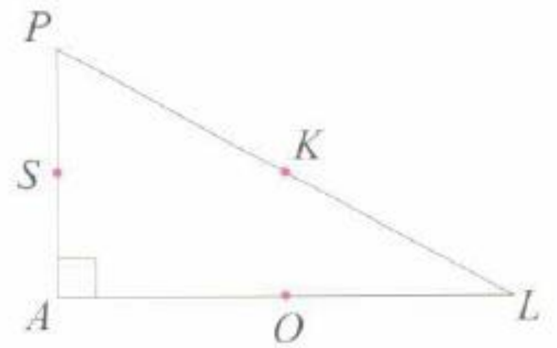
<u>Le théorème du centre de gravité</u> :

Dans un triangle , le centre de gravité est situé à $\frac{2}{3}$ du sommet et à $\frac{1}{3}$ du pied de la médiane (c-à-d à une distance double du sommet que du pied de la médiane).

9. Si le cercle de la figure ci-dessous est de 4cm de rayon, que vaut ON?



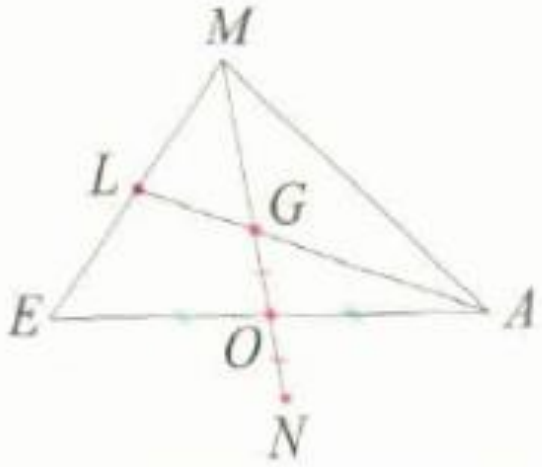
10. Dans la figure ci-dessous, PAL est un triangle rectangle en A, et K, S et O sont les milieux respectifs de $[PL]$, $[PA]$ et $[LA]$.



a) Démontre que $ASKO$ est un rectangle.

b) Démontre que l'aire de $ASKO$ est égale à la somme des aires de PSK et KOL.

14. a) Quelles sont les propriétés codées dans la figure ci-dessous?



b) Quelle est la nature de $GENA$?

c) On suppose que $MG = 2GO$. Démontre que L est le milieu de $[EM]$.

d) Que représente G pour le triangle MEA?