مدرسة التربية الحديثة

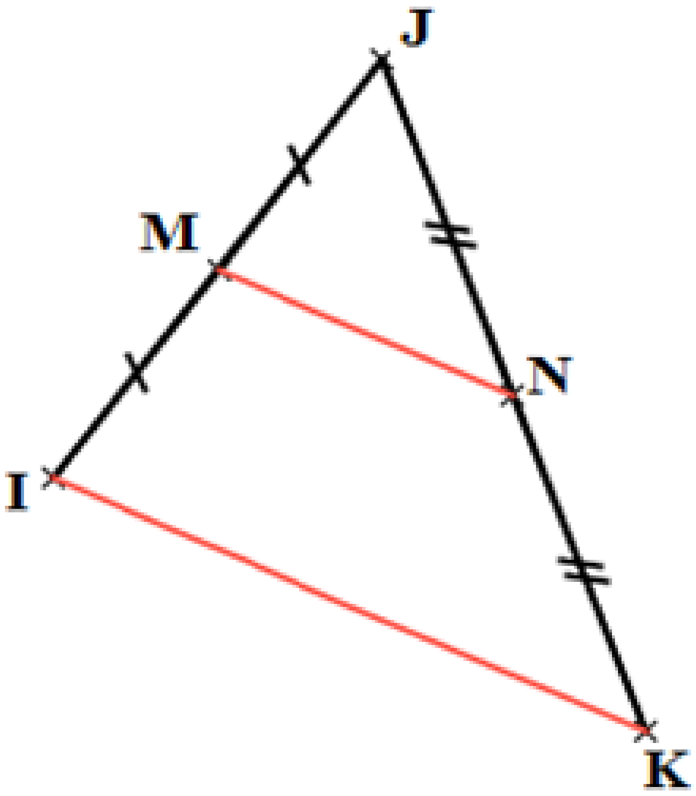
Maths: théorème de milieux

Classe :EB8 A,B,C et D

Samedi 10 avril 2021

Préparée par :l'enseignante Hala Sourani et M.Hayssam Osman

De milieu vers le parallélisme



M, N les milieux de [JI] et [JK]

D’après le théorème de milieu dans le triangle IJK

$$MN = \frac{IK}{2}$$

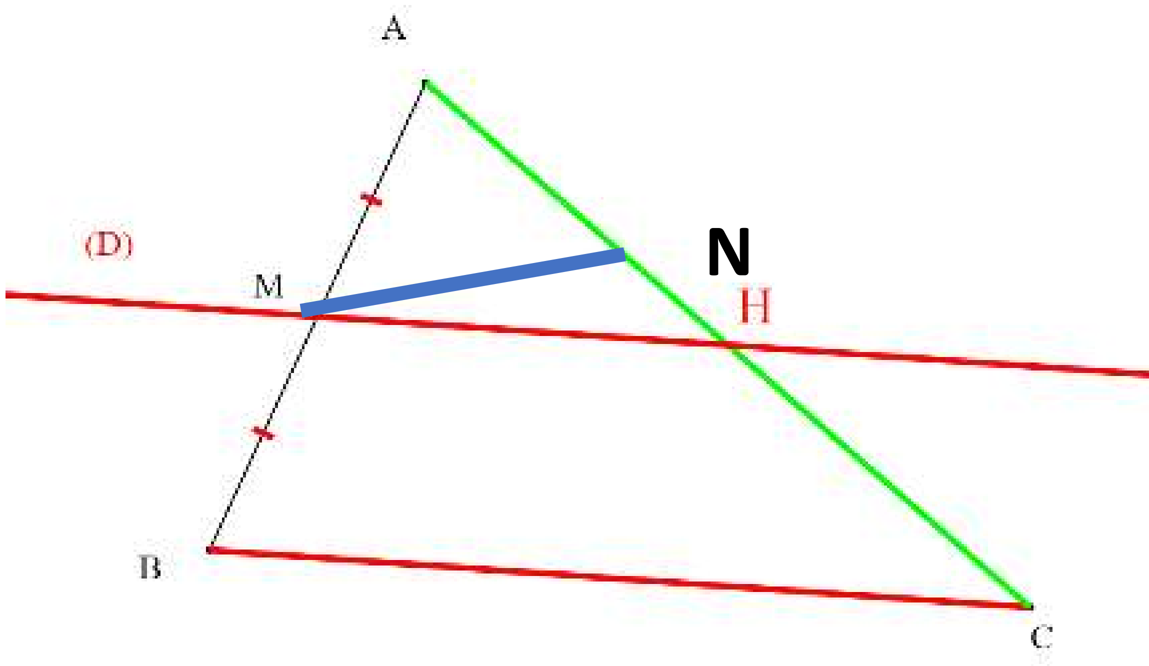
$$(MN) \parallel (IK)$$

Cas d'un triangle : du parallélisme vers le milieu

De parallélisme vers le milieu

Soit un triangle ABC.
Du milieu M de $[AB]$ menons la parallèle à $[BC]$; elle coupe $[AC]$ en un point H. Démontrons que H coïncide avec le milieu N de $[AC]$.

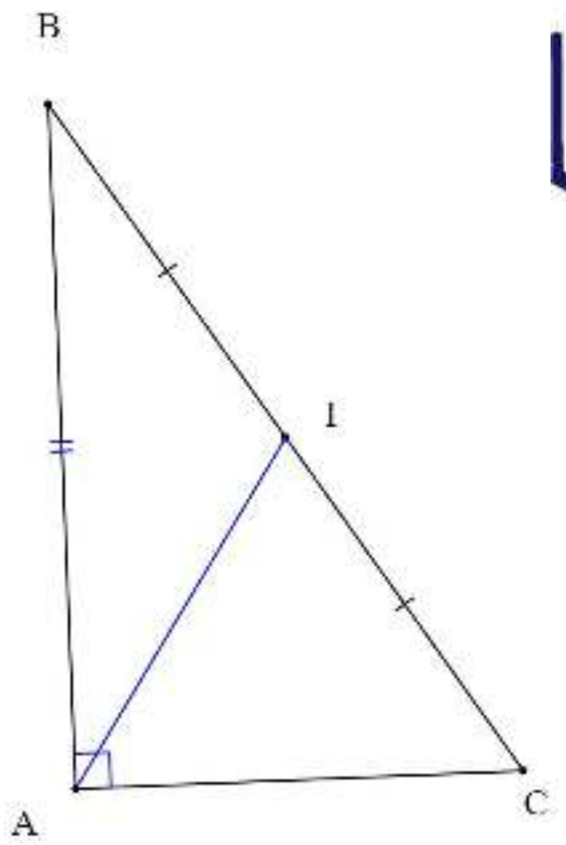
D'après le théorème des milieux, le segment $[MN]$, joignant les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, est parallèle à $[BC]$. Donc, (MN) et (MH) sont deux parallèles menées de M à (AB); elles doivent coïncider d'après le postulat d'Euclide. Ainsi, on a :



La droite menée du milieu d'un côté d'un triangle parallèlement à un autre côté passe par le milieu du troisième côté.

Réciproque de théorème de milieu dans un triangle

l’hypoténuse
c’est le coté opposé à l’angle droit.



D’où dans un triangle rectangle la médiane relative à l’hypoténuse vaut la moitié de l’hypoténuse.

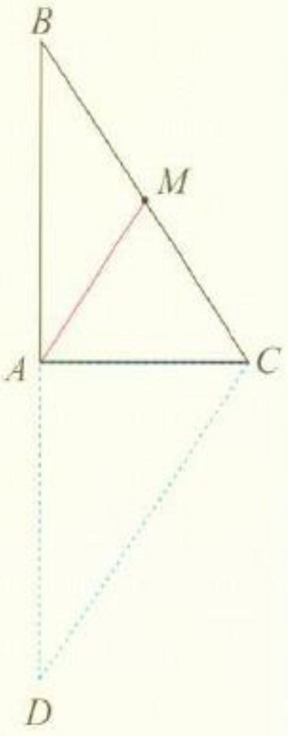
II. La médiane relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle

1. Cas direct

Soit un triangle ABC rectangle en A et M le milieu de $[BC]$. On construit le point D, symétrique de B par rapport à $[AC]$. Comme $(BA) \perp (AC)$, alors B, A et D sont alignés. Il s'ensuit que, dans le triangle BCD, M est le milieu de $[BC]$, par hypothèse, et A est le milieu de $[BD]$, à cause de la symétrie. Ainsi, $[AM]$ est le segment joignant les milieux des côtés $[BC]$ et $[BD]$; par suite, il est parallèle au troisième côté $[CD]$ et égal à sa moitié.

Par suite, on a $AM = \dfrac{CD}{2}$. Mais $DC = BC$ à cause de la symétrie; donc $AM = \dfrac{BC}{2}$.

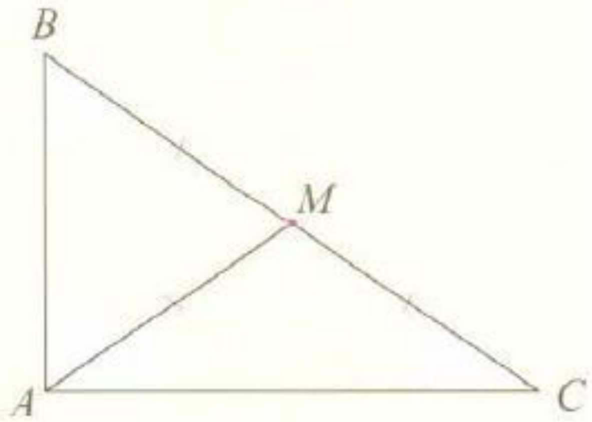
D'où la propriété suivante :



Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse est égale à sa moitié.

2. Cas réciproque

Soit un triangle ABC dans lequel la médiane $[AM]$ relative à $[BC]$ est égale à sa moitié.



Le triangle ABM est un triangle isocèle de sommet M. Par suite, on a : $\widehat{MBA} = \widehat{MAB}$.

De même, ACM est un triangle isocèle et l'on a $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$.

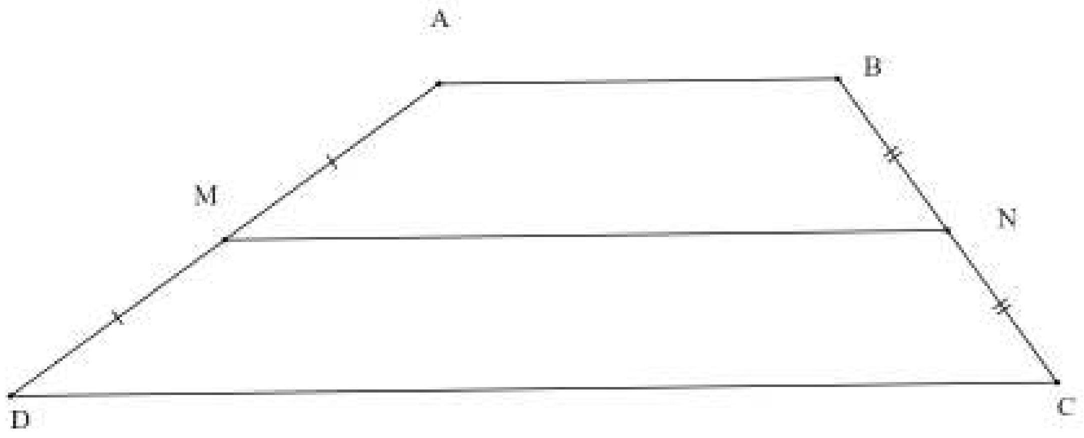
Donc la somme des angles du triangle ABC est 180°, et l'on a : $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$. Mais $\widehat{ABC} = \widehat{BAM}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{MAC}$.

Donc, $\widehat{BAC} + \widehat{BAM} + \widehat{MAC} = 180°$, soit $\widehat{BAC} + \widehat{BAC} = 180°$, et l'on a $\widehat{BAC} = 90°$. Par suite :

Un triangle dont la médiane issue d'un sommet vaut la moitié du côté opposé est rectangle en ce sommet.

Dans un trapèze, le segment joignant les milieux des côtés non parallèles est parallèle aux deux bases et est égal à leur demi-somme.

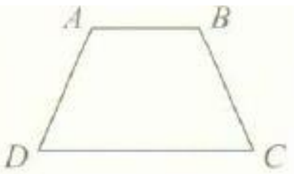
$$(MN)//(AB)//(DC)$$



$$\text{Et } MN=\frac{AB+DC}{2}$$

Trapèze isocèle

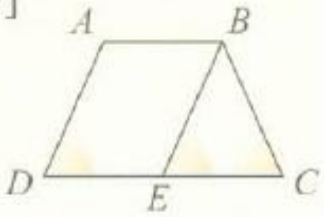
Un trapèze est dit ***isocèle*** si les angles adjacents à une même base sont égaux.



1. Le trapèze isocèle et ses angles

Soit un trapèze isocèle $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$ et tel que $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.

Par le point B, menons la parallèle $[BE]$ à $[AD]$.



Ainsi, $ABED$ est un parallélogramme comme ayant ses côtés parallèles deux à deux,

$\widehat{ADC} = \widehat{BEC}$ comme angles alternes-internes;

donc, $\widehat{BEC} = \widehat{BCE}$ et par suite, BEC est un triangle isocèle, et l'on a : $BC = BE$. D'autre part, $BE = AD$ comme côtés opposés dans un parallélogramme; par suite $AD = BC$. D'où la propriété suivante :

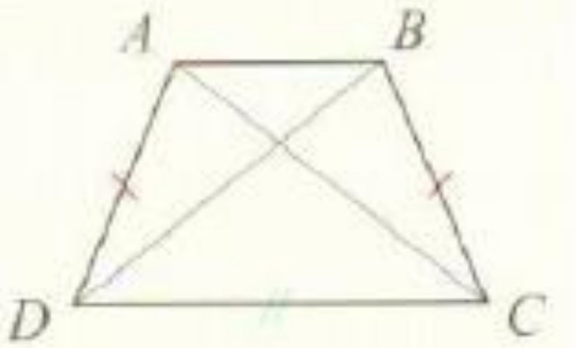
Dans un trapèze isocèle, les côtés non parallèles sont égaux

Réciproquement, on démontre que :

7 Si les côtés non parallèles d'un trapèze sont égaux alors ce trapèze est isocèle.

2. Le trapèze isocèle et ses diagonales

Soit un trapèze isocèle $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$. En considérant les deux triangles ACD et BCD, on démontre qu'ils sont égaux d'après le cas C.A.C, et l'on constate alors que $AC = BD$. D'où :

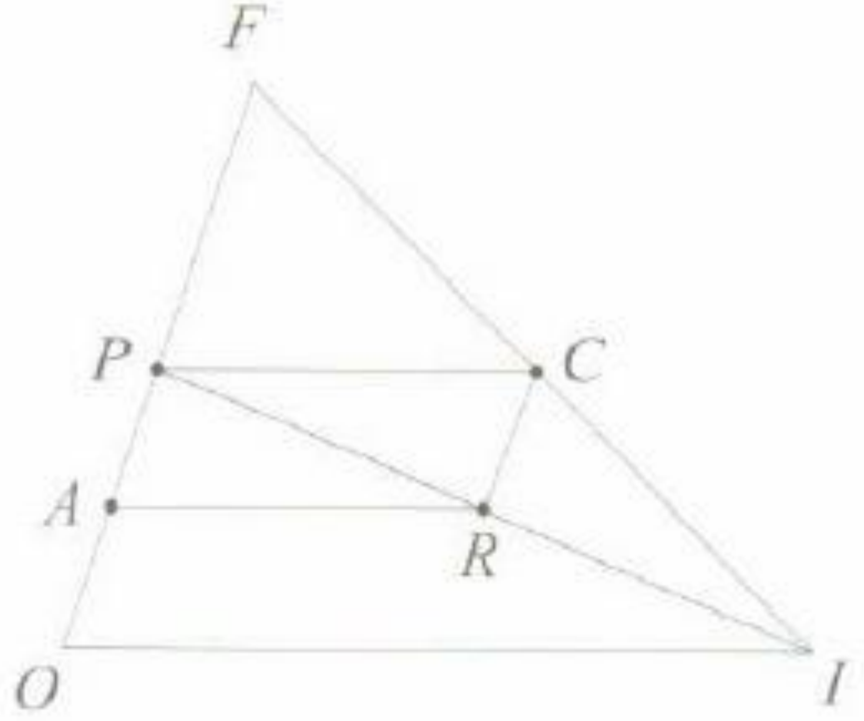


Dans un trapèze isocèle, les diagonales sont égales.

3 Eexercices supplémentaires
Comme devoir pour lundi

M, N et *P* sont les milieux respectifs des côtés [*AB*], [*AC*] et [*BC*] d'un triangle *ABC*.
Démontre que le périmètre du triangle *MNP* vaut la moitié de celui du triangle *ABC*.

4. Dans la figure ci-dessous, P est le milieu de $[FO]$, A le milieu de $[PO]$, R le milieu de $[PI]$ et C le milieu de $[FI]$.



Démontre que $PARC$ est un parallélogramme.

5. Soit un triangle SOL, E le milieu de $[SO]$, F le milieu de $[SL]$, G le point de concours de $[OF]$ et de $[LE]$ et K le symétrique de G par rapport à E.

a) Quelle est la nature de $OGSK$? Justifie ta réponse.

b) Démontre que G est le milieu de $[LK]$. Déduis-en que $LG = 2GE$.