Collection PUISSANCE

Mathématiques

Cycle moyen - 8ème année

EB
MATHÉMATIQUES 8

Nouvelle Edition
2007

Auteurs

C. MERHEB N. BADR
M. EL ASMAR K. ATTIEH
H. NASSAR A. MOARBES
G. KARROUM

Editeurs

AL- AHLIA

Composition et mise en page

Al-Ahlia Pre-press

Imprimerie

Les imprimeries modernes
AL- AHLIA

Distribution

AHLIA
Maison d'Edition

Zouk Mikaêl - ☎ : 09/214144 - 45 - Fax : 09/213499 - B.P : 369
Portables : 03/665187 - 03/217858

Avant-propos

Ce livre traite le nouveau programme de la huitième année (cycle moyen) avec un esprit nouveau: la construction individuelle des notions, la formation de l'élève à la communication et au raisonnement critique, la conservation du lien entre les mathématiques et les problèmes de la vie courante.

Chaque chapitre est formé de plusieurs parties.

- **Les activités préparatoires.** Il est important de ne pas négliger cette partie. Elle est voulue courte et accessible, permettant l'introduction d'une notion nouvelle ou parfois une partie du cours.
- **Le cours.** Il est voulu clair simple et concis, respectant ainsi le nouveau programme. Certains résultats essentiels sont parfois mis en relief, d'une façon ou d'une autre, pour permettre à l'élève de s'y référer.
- **Les exercices et problèmes.** Nous avons proposé un bon nombre d'exercices, choisis en fonction de leur intérêt formateur, et présentés en **trois rubriques.**

  – **Pour tester les connaissances.** Cette partie comporte les exercices les plus accessibles, permettant de vérifier si l'élève a possédé les acquis minimaux.

  – **Pour chercher.** Elle comporte des exercices qui demandent un effort supplémentaire de réflexion.

  – **Le test.** Le but de cette partie est de contrôler si l'élève a bien assimilé la notion étudiée.

Il est à noter qu'un bon nombre de problèmes a été choisi de la vie courante, étudiant des situations réelles, vécues, familières et non étrangères à l'élève. Ceci est fait dans un but bien déterminé: celui de consolider le lien étroit existant entre la vie quotidienne et les mathématiques.

Nous conseillons l'usage de la calculatrice, surtout que ceci est exigé par le nouveau programme.

Nous espérons que ce travail sera utile aux élèves de la 8ème année et contribuera à améliorer le niveau de l'enseignement des mathématiques.

Nous serons heureux et reconnaissants de recueillir toute suggestion, critique ou conseil.

Les auteurs

TABLE DES MATIÈRES

1. Puissances 7

2. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de deux ou de plusieurs entiers naturels 21

3. Triangles rectangles superposables 29

4. Racines carrées 37

5. Parallélogramme 47

6. Fractions littérales 57

7. Fractions composées 63

8. Parallélogrammes particuliers 71

9. Identités remarquables - Développement - Réduction 85

10. Factorisation 97

11. Trapèzes - Théorème des milieux 107

12. Équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$ 119

13. Inéquations du premier degré à une inconnue 125

14. Théorème de Pythagore 139

15. Expressions fractionnaires 149

16. Proportionnalité 159

17. Le cercle 169

18. Positions relatives de deux cercles 181

19. Arcs et angles 189

20. Statistique 209

21. Coordonnées du milieu d'un segment de droite 223

22. Vecteur et translation 231

23. Lieux géométriques et constructions 239

24. Géométrie dans l'espace 251

25. Pyramide 259

26. Cylindre - Cône - Sphère 265

1

PUISSANCES

Objectifs

1. Effectuer des opérations sur les puissances d'exposant entier positif d'un nombre relatif.

2. Utiliser les puissances d'exposants entier positif et entier négatif de 10.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Définition

2. Usage de la calculatrice (*fx*95*MS* - *fx*100*MS*)

3. Propriétés

4. Puissance d'exposant positif de 10 : 10^n (n entier naturel)

5. Puissance d'exposant négatif de 10 : 10^{-n} (n entier naturel)

6. Propriétés des puissances de 10

7. Développement d'un nombre décimal

8. Notation scientifique

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

Cours

1 DÉFINITION

a est un nombre relatif et n un entier naturel plus grand que 1 : **le produit de n facteurs égaux à a est noté a^n.**

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots a}_{n \text{ facteurs}}$$

a^n s'appelle la **puissance n^ième^ de a**.

On lit : «**a puissance n**» ou «**a exposant n**».

a est la base et **n** est **l'exposant** de cette puissance.

On note aussi : $a^1 = a$,

et pour tout nombre relatif a non nul : $a^0 = 1$.

EXEMPLES

- $(-2)^3$, $(-2)^4$ et $(-2)^{13}$ sont des puissances de -2 .
- $(-2)^{13}$ est la puissance treizième de -2 .
- $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$.
- $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$.

Application 1

Calcule :

- 4^3 et $(-4)^3$
- $(-1)^2$; $(-1)^3$ et $(-1)^5$.

2 USAGE DE LA CALCULATRICE (*fx*95*MS* - *fx*100*MS*)

Dans le tableau ci-dessous, tu trouves les séquences qui permettent de calculer les puissances figurant dans la première colonne.

4^3	4 ^ 3 = 64
$(-2)^3$	(– 2) ^ 3 = –8
$\left(\frac{3}{4}\right)^4$	(3 $a^{b/c}$ 4) ^ 4 = $\frac{81}{256}$
$(-4)^2 \times 2^5$	(– 4) ^ 2 × 2 ^ 5 = 512
$[(-2)^3]^4$	(– 2) ^ 3 ^ 4 = 4096

Application 2

Calcule en utilisant la calculatrice :

5^4 ; $(2^4)^3$; $(-6)^5$; $(-2{,}8)^4$; $\dfrac{4^2}{(-2)^3}$.

3 PROPRIÉTÉS

Propriété 1

a est un nombre relatif, n et m sont deux entiers naturels non nuls :

$$a^n \times a^m = \underbrace{\underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{m \text{ facteurs}}}_{(n+m) \text{ facteurs}} = a^{n+m} .$$

D'où : $\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$

Application 3

Ecris sous la forme d'une seule puissance.

1°) $(-3)^4 \times (-3)^2$. **2°)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^6$. **3°)** $b^4 \times b^{10}$.

Propriété 2

a et b sont deux nombres relatifs et n est un entier naturel non nul :

$$a^n \times b^n = \underbrace{(a \times \ldots \times a)}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{(b \times \ldots \times b)}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{(ab) \times \ldots \times (ab)}_{n \text{ facteurs}}$$

D'où : $\boxed{a^n \times b^n = (a \times b)^n}$

Application 4

Ecris sous la forme d'une seule puissance.

1°) $(-3)^5 \times (-2)^5$. **2°)** $x^5 \times y^5$. **3°)** $(-2{,}5)^2 \times (-4)^2$.

Propriété
3

a et b sont deux nombres relatifs avec $b \neq 0$ et n est un entier naturel non nul.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b}}_{n \text{ facteurs}} = \frac{\overbrace{a \times \ldots \times a}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{b \times \ldots \times b}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{a^n}{b^n} .$$

D'où : $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Application 5

Compare $\dfrac{15^3}{20^3}$ et $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.

Propriété
4

a est un nombre relatif, n et m sont deux entiers naturels non nuls:

$$(a^n)^m = \underbrace{\overbrace{(a \times \ldots \times a)}^{n \text{ facteurs}} \times \ldots \times \overbrace{(a \times \ldots \times a)}^{m \text{ facteurs}}}_{(n \times m) \text{ facteurs}} = a^{n \times m}$$

D'où : $\boxed{(a^n)^m = a^{n \times m}}$

Application 6

Ecris sous la forme d'une seule puissance.

1°) $[(-2)^3]^6$.   **2°)** $(4^4)^3$.   **3°)** $(a^3)^5$.

Propriété
5

a est un nombre relatif non nul, n et m sont deux entiers naturels non nuls avec $n \geq m$:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{n \text{ facteurs}}}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{facteurs}}} .$$

On simplifie par m facteurs égaux à a et on obtient :

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}} \quad \text{ou} \quad \boxed{a^n \div a^m = a^{n-m}}$$

On dit que a^n **est divisible par** a^m **.**

Application 7

Ecris sous la forme d'une seule puissance.

1°) $\dfrac{(-5)^{13}}{(-5)^8}$.

2°) $\left(\dfrac{-10}{3}\right)^{14} \div \left(\dfrac{-10}{3}\right)^9$.

3°) $\dfrac{x^5}{x^3}$.

4°) $\dfrac{c^{10}}{c^5}$.

Propriété

6

a est un nombre relatif et n un entier naturel :

- si $a > 0$, alors $a^n > 0$,
- si $a < 0$, alors : $\begin{cases} a^n > 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ a^n < 0 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exemples

- $2^5 > 0$.
- $(-2)^4 > 0$.
- $(-2)^5 < 0$.

Application 8

Quel est le signe de : $(-3)^{15}$? $(-2,8)^8$? $(-14)^{22} \times (-103)^{17}$?

4 PUISSANCE D'EXPOSANT POSITIF DE 10 : 10^n (n entier naturel)

Observe le tableau suivant.

Nombre	Nombre de zéros	Ecriture sous la forme d'une puissance de 10	Exposant de 10
10	1	10^1	1
100	2	10^2	2
1	0	10^0	0
10 000	4	10^4	4
100 000 000	8	10^8	8

Pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{10^n = 1\underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ zéros}}}$

(n zéros à droite de 1).

5 PUISSANCE D'EXPOSANT NÉGATIF DE 10 : 10^{-n} (n entier naturel)

1°) $\mathbf{\dfrac{1}{10\ 000} = 0{,}0001}$ **.**

On note : $\boxed{\mathbf{\dfrac{1}{10\ 000} = \dfrac{1}{10^4} = 10^{-4}}}$

On lit : **10 puissance – 4** ou **10 exposant – 4**.

L'inverse de 10^4 est $\dfrac{1}{10^4} = 10^{-4}$.

2º) Observe le tableau suivant.

$\frac{1}{10^n}$	**Ecriture Décimale**	**Ecriture sous la forme d'une puissance de 10**	**Nombre de zéros à gauche de 1**	**Exposant de 10**
$\frac{1}{10^2}$	0,01	10^{-2}	2	– 2
$\frac{1}{10^3}$	0,001	10^{-3}	3	– 3
$\frac{1}{10^5}$	0,00001	10^{-5}	5	– 5
$\frac{1}{10}$	0,1	10^{-1}	1	– 1
$\frac{1}{10^4}$	0,0001	10^{-4}	4	– 4

Pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{\frac{1}{10^n} = 10^{-n} = \underbrace{0{,}0 \ldots 0}_{n \text{ zéros}}1}$

(*n* zéros à gauche de 1).

6 PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES DE 10

Les propriétés des puissances de 10 sont les mêmes que celles de a^n .

n et m sont deux entiers naturels non nuls :

Propriétés	Exemples
$\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$	$\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$
$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$	$10^3 \times 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$
$(10^n)^m = 10^{n \times m}$	$(10^2)^3 = 10^{2\times3} = 10^6$
$10^{-n} \times 10^{-m} = 10^{-(n+m)}$	$10^{-3} \times 10^{-2} = 10^{-(3+2)} = 10^{-5}$
$(10^n)^{-m} = 10^{-n.m}$	$(10^2)^{-3} = 10^{-2.3} = 10^{-6}$
$(10^{-n})^m = 10^{-n.m}$	$(10^{-2})^3 = 10^{-2.3} = 10^{-6}$
$(10^{-n})^{-m} = 10^{n.m}$	$(10^{-2})^{-3} = 10^{2.3} = 10^6$

Remarques

- Toutes les puissances de 10 sont des nombres positifs :
  $10^3 > 0$; $10^{-3} > 0$.
- $(-10)^n$ est positif si n est pair : $(-10)^2 = 100$.
- $(-10)^n$ est négatif si n est impair : $(-10)^3 = -1000$.
- -10^n est un nombre négatif : $-10^2 = -100$; $-10^3 = -1000$.

7 DÉVELOPPEMENT D'UN NOMBRE DÉCIMAL

⊙ $365 = 3 \times 100 + 6 \times 10 + 5$
$= 3 \times 10^2 + 6 \times 10 + 5 \times 10^0$.

«$3 \times 10^2 + 6 \times 10 + 5 \times 10^0$» est le développement du nombre 365.

⊙ $8635{,}39 = 8 \times 1000 + 6 \times 100 + 3 \times 10 + 5 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100}$
$= 8 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}$.

«$8 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}$» est le développement du nombre 8635,39.

8 NOTATION SCIENTIFIQUE

Activité

Complète :

1°) $159{,}43 = 1{,}5943 \times 10^{\cdots}$; **2°)** $0{,}62 = 6{,}2 \times 10^{\cdots}$; **3°)** $0{,}009 = 9 \times 10^{\cdots}$

Définition

Un **nombre positif en notation scientifique** est de la forme :

$\boldsymbol{a \times 10^p}$ où $\boldsymbol{a}$ est un nombre **décimal** avec $\boldsymbol{1 \leq a < 10}$ et $\boldsymbol{p}$ **un entier.**

EXEMPLES

Le nombre	**Sa notation scientifique**
42356	$= 4{,}2356 \times 10^4$
0,0123	$= 1{,}23 \times 10^{-2}$
731,463	$= 7{,}31463 \times 10^2$.

Application 9

Ecris, en notation scientifique, les nombres suivants : 13,42 ; 0,01 ; 15×10^{-3} .

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Sans effectuer, trouve le signe de chacun des nombres suivants .

$(-1{,}1)^3$; $(-1{,}2)^4$; $(-0{,}5)^5$; $(-20)^4$; $(-1)^{17}$; $(-1)^{10}$; $(-1)^0$;
$-(-7)^{175}$; -4^{204} ; -6^{203} .

2 Ecris sous forme d'une seule puissance puis simplifie s'il y a lieu .

$A = (-3)^2 \times (-7)^2$. $B = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^4$. $C = (-2)^3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3$.

$D = \left[\left(\frac{-3}{5}\right)^4\right]^5$. $E = (-2{,}1) \times (-2{,}1)^2 \times (-2{,}1)^3$. $F = \dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^7 \times (2{,}1)^7}{(-2)^7}$.

$G = \dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^4}{\left(\frac{-2}{5}\right)^4}$. $H = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^3 \times \left(\frac{a}{b}\right)$. $I = (a^3 \times a)^2$.

3 Ecris sous forme de puissance de 10.

1º) $10^2 \times 10^5$. **2º)** $10^{-1} \times 10^{-3}$. **3º)** $10^3 \times 10^{-4}$.

4º) $10^4 \times 10^{-3}$. **5º)** $10^{-1} \times 10^{-2} \times 10^{-3}$. **6º)** $10^{-4} \times 10^6 \times 10^9$.

7º) $\dfrac{10^{-2}}{10^{-5}}$. **8º)** $\dfrac{10^{-3}}{10^4}$. **9º)** $\dfrac{10^7}{10^{-4}}$.

4 Complète par l'exposant convenable.

1º) $(-6)^{24} = (-6)^{13} \times (-6)^{\cdots}$. **2º)** $(1{,}5)^6 = \dfrac{(-1{,}5)^9}{(-1{,}5)^{\cdots}}$. **3º)** $[(-4{,}7)^{\cdots}]^5 = -(4{,}7)^{15}$.

4º) $(0{,}035) \times 10^{\cdots} = 35$. **5º)** $\dfrac{(10)^2}{10^{\cdots}} = 10^{-8}$. **6º)** $10^3 \times 10^{\cdots} = 10^{-5}$.

7º) $[(-3{,}3)^4]^{\cdots} = (3{,}3)^{12}$. **8º)** $(-2{,}5) \times 10^{\cdots} = -2500$. **9º)** $\dfrac{1}{10^{\cdots}} = 10^{-3}$.

10º) $(a^3)^{\cdots} = a^9$.

5 Explique pourquoi 5^{18} est multiple de 5^3 ; de 5^7 .

6 Explique pourquoi 7^{15} est divisible par 7^3 ; 7^2 .

7 Donne l'écriture décimale de chacun des nombres suivants.

1°) 10^2 .
2°) 10^{-3} .
3°) 10^7 .
4°) 10^{-8} .
5°) 10^0 .
6°) 10^{-1} .
7°) 24×10^2 .
8°) $1,3 \times 10^{-3}$.
9°) $0,12 \times 10^4$.

8 Encadre chacun des nombres suivants par deux puissances consécutives de 10.

301 ; 105,31 ; 0,47 ; 0,03 .

9 Ecris en notation scientifique chacun des nombres suivants.

0,1 ; 0,02 ; 470 ; 0,002 ; 36×10^{-3} ; $2^2 \times 3 \times 10^4$; $\dfrac{(2,5)^2 \times (4,5)^2}{(0,2)^4 \times (1,5)^4}$.

10 Ecris sous forme de puissance de 10.

1°) 2×500 .
2°) $0,4 \times 2\ 500$.
3°) $\dfrac{1}{0,0001}$.
4°) $80 \times 0,125$.
5°) $\dfrac{1}{625 \times 1,6}$.
6°) $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{25}$.

11 Effectue en utilisant la calculatrice.

1°) $9^4 - 8^4 - 7^4$.
2°) $7^4 - 6^2 - 5^3$.
3°) $5^3 - 7^2 - 8^3$.
4°) $5^5 - \left(4^2 + 3^4\right)$.

12 Réponds par vrai ou faux.

1°) m et n sont deux entiers naturels,
$(-3)^n \times (-3)^m = (-3)^{m+n}$.

2°) m et n sont deux entiers naturels,
$(-3 \times 5)^{m+n} = (-3)^m \times (5)^n$.

3°) Pour tout entier naturel n,
$(-5)^n$ est négatif.

4°) Pour tout entier naturel n,
$(3-2)^n = 3^n + (-2)^n$.

5°) $(-7)^8 = 7^8$.

6°) $(-0,1)^5 = (0,1)^5$.

7°) $-5 \times (-1,3)^5 = 5 \times (1,3)^5$.

8°) $\dfrac{(-5,3)^8}{(-3,5)^8} = \left(\dfrac{5,3}{3,5}\right)^8$.

9°) $[-(-7,2)^6]^7 = (7,2)^{42}$.

10°) $(-3,4)^7 \times (2)^7 = -(6,8)^7$.

11°) $\dfrac{(-4,1)^9}{(4,1)^3} = (4,1)^6$.

12°) $10^{-5} > 10^{-4}$.

13°) $(0,5)^4 < (0,5)^3$.

13 Une seule des réponses est correcte . Laquelle ? Justifie .

1°) $10^{-2} = ...$	**a)** 0,1	**b)** 100	**c)** 0,01
2°) $0,42 = ...$	**a)** $4,2 \times 10^{-1}$	**b)** 42×10^{-1}	**c)** $0,42 \times 10^{2}$
3°) $(-3)^5 = ...$	**a)** 3^5	**b)** -3^5	**c)** -15
4°) $(-10)^0 = ...$	**a)** -10	**b)** -1	**c)** 1 .

Pour chercher

14 **1°)** Ecris le développement du nombre 9 876,543 suivant les puissances de 10.

2°) Trouve les chiffres qui manquent dans le nombre suivant et dans son développement suivant les puissances de 10 :

$3\square 56,\square 89 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + \square \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + \square \times 10^{-3}$.

15 **1°)** Quelle est l'aire d'un rectangle R_1 ayant pour dimensions $\ell = 10^3$ cm et $L = 10^5$ cm ?
2°) Un rectangle R_2 a la même aire que R_1 . Sa longueur étant de 10^7 cm, quelle est sa largeur ?
3°) Un rectangle R_3 a pour dimensions 2^{10} cm et 5^{10} cm. A-t-il la même aire que R_1 ?
4°) Un carré a la même aire que le rectangle R_1 . Quelle est la mesure de son côté ?

16 Les nombres $A = 4{,}1 \times 10^{6}$, $B = 1{,}999 \times 10^{-4}$, $C = 1 \times 10^{-3}$ et $D = 1 \times 10^{5}$ sont écrits en notation scientifique.

1º) Donne l'écriture décimale de chacun d'eux.

2º) Encadre chacun d'eux par deux puissances consécutives de 10.

3º) Écris $A \times C$ en notation scientifique.

17 **1º)** Quelle est l'écriture décimale de $\dfrac{4}{5}$?

2º) Quelle est l'écriture scientifique de $\dfrac{4}{5}$?

3º) Effectue $\dfrac{4 \times 10^{5}}{5 \times 10^{3}}$ et donne la réponse en notation scientifique.

18 Donne la forme la plus simple de chacune des expressions suivantes.

$$A = \frac{3^{5} \times 5^{3} \times 8^{6}}{5^{2} \times 6^{5} \times (10)^{9}} \quad ; \quad C = \left(\frac{-3}{5}\right)^{7} \times \left(\frac{-8}{3}\right)^{5} \times \left(\frac{0{,}2}{0{,}5}\right)^{6} .$$

$$B = \frac{(-7)^{9} \times (-12)^{9} \times 2^{6}}{(21)^{7} \times 6^{5}} \quad ; \quad D = \frac{(7{,}2)^{3} \times (3{,}6)^{2}}{24{,}3 \times (4{,}8)^{4} \times 72^{2}} .$$

19 On donne les nombres :

$$A = \left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{5} \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{3}\right] \div \left(\frac{2}{3}\right)^{6} . \qquad C = \left[\left(\frac{-3}{4}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{2} .$$

$$B = \left[\left(\frac{-3}{5}\right)^{8} \div \left(\frac{-3}{5}\right)^{6}\right] \times \left(\frac{3}{5}\right)^{4} . \qquad D = \left[\left(\frac{-5}{3}\right)^{4} \div \left(\frac{5}{3}\right)^{3}\right]^{2} .$$

1º) Précise le signe de chacun des nombres A, B, C et D.

2º) Effectue et simplifie chacun des nombres donnés.

20 Donne la forme la plus simple .

$$A = \frac{10^{2} \times 18^{3}}{15^{3} \times 12^{2}} \quad ; \quad B = \frac{(-6)^{3} \times 10^{2}}{(-8)^{3} \times 10^{-1} \times 15^{2}} \quad ; \quad C = \frac{4{,}5 \times 0{,}21 \times 10^{3}}{0{,}5 \times 70}$$

$$D = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4}} \; ; \; E = \frac{(2{,}25)^{3} \times (4{,}9)^{4} \times (0{,}8)}{(0{,}14)^{3} \times (10{,}5)^{5}} \; ; \; F = \frac{(-0{,}2)^{4} \times (0{,}5)^{3} \times (0{,}8)^{2} \times 10^{5}}{(0{,}04)^{2} \times (-2)^{3} \times (-5)^{2}} .$$

TEST

1 Effectue et réduis les expressions suivantes.

$\mathbf{A} = (-3{,}4)^2 \times (-2{,}5)^2$.

$\mathbf{B} = (-3{,}4)^4 \div (3{,}4)^2$.

$\mathbf{C} = [(-0{,}2)^3]^9$.

$\mathbf{D} = \dfrac{(5)^2 \times (-2)^3 \times 10^2}{(-4)^3 \times 10^{-2}}$.

$\mathbf{E} = (-4) \times (-0{,}5)^2 \times 2 \times (0{,}5)$.

(2 - 2 - 2 - 3 - 3 points)

2 Effectue (donne la réponse sous forme décimale).

$$\frac{(-0{,}2)^4 \times (0{,}5)^3 \times (0{,}8)^2 \times 10^5}{4^2 \times (-2) \times (-5)^2} .$$

(2 points)

3 Ecris en notation scientifique.

$0{,}0413$; $\dfrac{1}{25}$; $\dfrac{2}{5}$; $1\,999{,}001$. **(4 points)**

4 Vérifie que chacun des nombres suivants est de la forme $a^n \times b^m \times 10^p$, où n, m et p sont des entiers. **(2 points)**

$\mathbf{A} = (0{,}2)^4 \times (-0{,}5)^3 \times (-2) \times (-0{,}2)^3 \times 5^3 \times 10^{-4}$.

$\mathbf{B} = \dfrac{(-6)^3 \times (8)^4 \times (0{,}3)^4}{(0{,}3)^3 \times 9^2 \times (0{,}2)^2}$.

5 La planète Uranus est située à 29×10^0 km du soleil et a un diamètre de 51×10^3 km.

Ecris ces nombres sous forme de nombres entiers. **(2 points)**

2 PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE DE DEUX OU DE PLUSIEURS ENTIERS NATURELS

Objectif

Calculer le pgcd et le ppcm de deux ou de plusieurs entiers naturels.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Relation entre le *pgcd* et le *ppcm* de deux entiers naturels
2. Recherche du *pgcd* de trois ou de plusieurs entiers naturels
3. Recherche du *ppcm* de deux entiers naturels (rappel)

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 RELATION ENTRE LE *pgcd* ET LE *ppcm* DE DEUX ENTIERS NATURELS

Activité

1°) Détermine d, le plus grand commun diviseur (*pgcd*), et m, le plus petit commun multiple (*ppcm*) des deux nombres 108 et 405.

2°) Vérifie que : $m \times d = 108 \times 405$.

Règle

Si d est le *pgcd* de deux entiers naturels a et b et m leur *ppcm* , alors :

$$\boxed{m \times d = a \times b}$$

En particulier, si a et b sont premiers entre eux, alors $d = 1$ et $m = a \times b$.

2 RECHERCHE DU *pgcd* DE TROIS OU DE PLUSIEURS ENTIERS NATURELS

Activité

1°) Décompose en un produit de facteurs premiers chacun des nombres : 390 , 630 et 825.

2°) Détermine $d_1 = pgcd\ (390 , 630)$; écris d_1 sous forme d'un produit de facteurs premiers.

3°) Détermine d, le *pgcd* de d_1 et 825; écris d sous forme d'un produit de facteurs premiers.

4°) Détermine le produit e des facteurs premiers communs aux nombres 390 , 630 et 825 affectés de leur plus petit exposant.

5°) Obtiens-tu $d = e$?

Règle

Pour trouver le *pgcd* de trois ou plusieurs entiers naturels, on utilise l'une des méthodes suivantes :

1ère méthode

On calcule le *pgcd* d_1 de deux de ces entiers puis le *pgcd* de d_1 et d'un troisième entier, et ainsi de suite ...

2ème méthode

⊙ On les décompose en facteurs premiers .

⊙ On calcule le produit des facteurs premiers communs, chacun d'eux étant affecté de son plus petit exposant.

Remarque

Si le *pgcd* de deux ou de plusieurs nombres est 1, alors ils sont dits premiers entre eux (ces nombres ne sont pas nécessairement premiers).

Les trois nombres 322 , 546 et 1 045 sont premiers entre eux, car :

$322 = 2 \times 7 \times 23$; $546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$; $1\,045 = 5 \times 11 \times 19$.

pgcd (322 , 546 et 1 045) = 1 .

Application 1

1º) Trouve $d = pgcd\ (126 , 230 , 420)$.

2º) Vérifie que les trois nombres 78 , 120 et 85 sont premiers entre eux.

3º) Calcule le *pgcd* des nombres : 48 , 108 , 150 et 225 .

3 RECHERCHE DU *ppcm* DE TROIS OU DE PLUSIEURS ENTIERS NATURELS (rappel)

Activité

1º) Décompose en un produit de facteurs premiers chacun des nombres : 168 , 180 et 252.

2º) Détermine $m_1 = ppcm\ (168 , 180)$; écris m_1 sous forme d'un produit de facteurs premiers.

3º) Détermine m, le *ppcm* de m_1 et 252 ; écris m sous forme d'un produit de facteurs premiers.

4º) Détermine le produit f de tous les facteurs premiers des nombres 168 , 180 et 252 affectés de leur plus grand exposant.

5º) Obtiens-tu $m = f$?

Règle

Pour trouver le *ppcm* de trois ou plusieurs entiers naturels, on utilise l'une des méthodes suivantes .

1ère méthode

On calcule le *ppcm* m_1 de deux de ces entiers, puis le *ppcm* de m_1 et d'un troisième entier, et ainsi de suite ...

2ème méthode

⊙ On les décompose en facteurs premiers .

⊙ On calcule le produit des facteurs premiers, chacun étant affecté de son plus grand exposant.

Application 2

1º) Trouve le *ppcm* des nombres 840 , 308 et 675.

2º) Calcule le *pgcd* des nombres 112 et 135 ; quel est alors leur *ppcm* ?

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester les connaissances

1 a et b sont deux entiers ayant d comme *pgcd* et m comme *ppcm* .
Complète le tableau suivant.

a	b	d	m	$a \times b$	$d \times m$
24	30				
16	48				
19	36				
25	26				

2 **1º)** Calcule le *pgcd* et le *ppcm* des deux nombres :

$a = 2^3 \times 3 \times 7$ et $b = 5 \times 17$.

2º) Compare le *ppcm* obtenu et le produit $a \times b$.

3 Trouve le *pgcd.* de 25 et 39 ; déduis-en leur *ppcm* .

4 Calcule le *pgcd* du numérateur et du dénominateur des fractions suivantes, puis rends irréductibles ces fractions .

1º) $\frac{84}{96}$ **3º)** $\frac{126}{588}$;

2º) $\frac{99}{77}$ **4º)** $\frac{2\ 500}{3\ 600}$.

5 **1º)** Détermine d, le *pgcd* et m, le *ppcm* de 852 et 1 314 .
2º) Trouve x et y sachant que $852 = d \times x$ et $1\ 314 = d \times y$.
3º) Vérifie que x et y sont premiers entre eux.

6 **1°)** $d = pgcd\ (a\ ;\ b)$, $m = ppcm\ (a\ ;\ b)$.
Complète le tableau suivant.

a	*b*	*d*	*m*
5	6		
16	17		
20	21		
3	4		

2°) n et $n + 1$ sont deux entiers naturels consécutifs ($n \neq 0$). Peux-tu deviner leur *pgcd* ? leur *ppcm* ?

7 **1°)** Calcule le *pgcd* de 48 et 64 ; soit d.

2°) Calcule le *pgcd* de d et 72 ; soit ℓ .

3°) Que représente ℓ pour les nombres 48 ; 64 et 72 ?

4°) Fais de même pour calculer le *pgcd* de 135 ; 25 et 75.

8 Décompose en produits de facteurs premiers et calcule le *pgcd* et le *ppcm* de :

1°) 3 600 ; 4 050 et 540 .

2°) 81×35 ; 63×7 et 72×25 .

3°) $8 \times 9 \times 13$; $15 \times 56 \times 9$
et $27 \times 169 \times 343$.

9 **1°)** Vérifie que 24 ; 36 et 17 sont premiers entre eux.

2°) Calcule le *ppcm* de 24 ; 36 et 17.

10 Trouve le *ppcm* de :

1°) 15 ; 20 et 60 .

2°) 8 ; 18 et 63 .

11 **1°)** Calcule $d = pgcd\ (60\ ,\ 80\ ,\ 108)$ et $m = ppcm\ (60\ ;\ 80\ ;\ 108)$.

2°) Trouve D, le *pgcd* et M, le *ppcm* des nombres :
7×60 ; 7×80 et $M = 7 \times m$.

3°) Vérifie que $D = 7 \times d$ et $M = 7 \times m$.

12 Réponds par vrai ou faux.

1°) Le *pgcd* de plusieurs nombres divise chacun de ces nombres.

2°) Le *pgcd* de deux entiers est plus grand que chacun de ces entiers.

3°) Deux entiers naturels premiers entre eux, sont premiers.

4°) Deux entiers premiers sont toujours premiers entre eux.

5°) Les deux nombres : $a = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$ et $b = 5 \times 7 \times 11 \times 13^2$ ont 7 comme *pgcd* .

6°) Le *ppcm* de deux entiers a et b est inférieur à chacun d'eux.

7°) 12 est un multiple de 4, alors :
$ppcm\ (12\ ,\ 4) = 12$.

8°) 4 est un diviseur de 12, alors :
$pgcd\ (12\ ,\ 4) = 4$.

Pour chercher

13 Le *pgcd* de deux entiers naturels est 154 ; leur *ppcm* est 4 620 .
Si l'un d'eux est 770 , trouve l'autre.

14 Trouve deux entiers premiers entre eux ayant 8 pour somme. Donne toutes les solutions.

15 Le produit de deux entiers est 1 512 ; leur *ppcm* est 252 . Trouve leur *pgcd* .

16 **1°)** Décompose en un produit de facteurs premiers, chacun des nombres : 506 ; 759 et 177 .

2°) Calcule le *ppcm* des nombres donnés ci-dessus ; soit *m* .

3°) Trouve les quotients de la division de *m* par chacun des nombres : 506 ; 759 et 177.

4°) Calcule le *pgcd* des quotients ainsi obtenus.

5°) Ces quotients sont-ils premiers entre eux ?

17 Trois terrains ont pour aires respectives : 3 000 m^2 , 3 600 m^2 et 4 800 m^2 . Ces trois terrains sont vendus par lots aux conditions suivantes :

1°) les terrains sont divisés en lots ayant tous la même aire,

2°) l'aire de chaque lot est la plus grande possible.
Calcule le nombre de lots pour chaque terrain.

18 Trois bateaux partent d'un même port : le premier tous les 6 jours, le deuxième tous les 8 jours et le troisième tous les 12 jours.

S'ils partent ensemble le 5 mai, quel jour repartiront-ils de nouveau pour la première fois ensemble ?

19 Un phare émet trois feux différents: un feu rouge toutes les 12 secondes, un feu vert toutes les 15 secondes et un feu jaune toutes les 18 secondes. Ces feux sont émis simultanément.
Indique le premier instant des émissions simultanées des trois feux à la fois.

20 Un marchand a trois pièces de tissu: la première de 315 cm, la deuxième de 525 cm et la troisième de 630 cm.
Il veut les partager en pièces égales aussi longues que possible. Quelle sera la longueur commune de ces pièces ?

21 Pour une fête scolaire, on dispose les élèves d'une école par files exactes de 5 , de 6 et de 10.
Trouve l'effectif de l'école sachant qu'il est compris entre 400 et 500 .

22 On a planté des pommiers également espacés sur le pourtour d'un terrain triangulaire dont les côtés mesurent 144 m, 180 m et 240 m.
Sachant qu'il y a un arbre à chaque sommet et que la distance de deux pommiers consécutifs est comprise entre 4 m et 10 m, calcule le nombre des pommiers plantés.

23 Nabil a des timbres en nombre compris entre 970 et 1 000.

S'il les range par 5, par 6 ou bien par 10, il lui reste toujours 4.

Quel est le nombre de ces timbres ?

24 Une équipe de soldats comptant moins de 1 000 hommes, fait l'exercice sur un champ de manœuvres. En les voyant se mettre en colonnes :

1º) par files de 8 hommes,
2º) par files de 15 hommes,
3º) par files de 25 hommes,

un spectateur qui a remarqué que, dans les trois cas, la dernière file était incomplète et ne comprenait que 5 hommes, affirme que si les soldats se mettaient en colonnes par files de 11 hommes, toutes les files seraient complètes.

Trouve le nombre des soldats.

25 En comptant les marches d'un escalier 2 par 2, il en reste 1. En les comptant 3 à 3, il en reste 2; en les comptant 5 par 5, il en reste 4.

Quel est le nombre des marches de cet escalier, sachant qu'il est compris entre 70 et 100 ?

26 Marc compte ses timbres par 12, par 16 et par 20; il lui en reste 8 à chaque fois. En les comptant par 13, il ne lui en reste plus rien.

Combien possède-t-il de timbres ?

TEST

1 a et b sont deux entiers naturels; d et m sont respectivement leur *pgcd* et leur *ppcm* .

1°) Complète le tableau. **(2 points)**

a	b	d	m
7	9		
9	11		
21	23		
23	25		

2°) Complète. **(1 point)**

Si a et b sont deux entiers naturels impairs consécutifs, alors :

pgcd $(a\ ,\ b) = \ldots$ et *ppcm* $(a\ ,\ b) = \ldots$.

2 **1°)** Calcule x = *pgcd* (420 , 3 080) .

2°) Calcule ensuite y = *pgcd* (x , 455).

3°) Que représente y pour les nombres : 420 , 3 080 et 455 ? **(3 points)**

3 **1°)** Décompose en un produit de facteurs premiers, chacun des nombres : 345 , 880 et 1 260 .

2°) Trouve d, le *pgcd* et m, le *ppcm* de ces nombres.

3°) Trouve les quotients, par d, de chacun des nombres : 345 , 880 et 1 260 .

4°) Vérifie que ces quotients sont premiers entre eux. **(5 points)**

4 Le *pgcd* de deux entiers est 28, leur *ppcm* est 27 720 ; l'un d'eux est 2 520 .
Trouve l'autre. **(2 points)**

5 Ecris la fraction $\frac{825}{930}$ sous forme d'une fraction irréductible. **(2 points)**

6 **1°)** Décompose en un produit de facteurs premiers, chacun des nombres : 540 , 420 et 1 170.

2°) Calcule d, le *pgcd* et m, le *ppcm* des entiers ci-dessus.

3°) Trouve les quotients de m par chacun des nombres : 540 , 420 et 1 170.

4°) Vérifie que les quotients obtenus sont premiers entre eux. **(5 points)**

3

TRIANGLES RECTANGLES SUPERPOSABLES

Objectif

Connaître et utiliser les cas de superposition de deux triangles rectangles.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Premier cas de superposition de deux triangles rectangles
2. Deuxième cas de superposition de deux triangles rectangles

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 PREMIER CAS DE SUPERPOSITION DE DEUX TRIANGLES RECTANGLES

Activité

1°) ⊙ Trace un segment $[BC]$ de mesure 5 cm.

⊙ Trace la demi-droite $[Bx)$ qui forme avec $[BC)$ un angle de $40°$.

⊙ Soit A le pied de la perpendiculaire menée de C à $[Bx)$.

Tu as ainsi construit un triangle rectangle *ABC* connaissant la mesure de son hypoténuse et un angle aigu.

2°) Fais de même pour construire un triangle MNF rectangle en M et tel que

$NF = 5$ cm et $\widehat{FNM} = 40°$.

3°) Fais un calque de chacun des deux triangles tracés ci-dessus.

4°) Vérifie que ces deux calques sont superposables.

5°) Nomme les côtés isométriques de ces deux triangles.

Règle

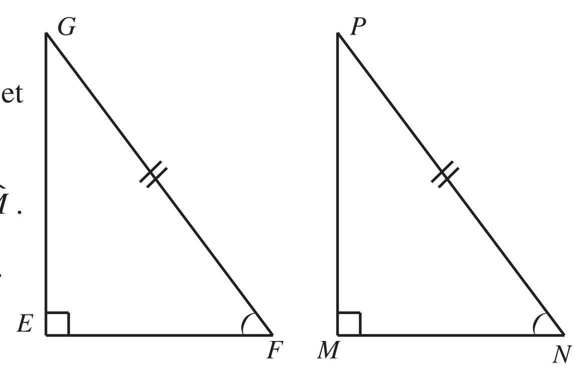
Deux **triangles rectangles,** ayant **l'hypoténuse** de l'un **isométrique** à l'hypoténuse de l'autre et un **angle aigu** de l'un **égal** à un angle aigu de l'autre, sont **superposables.**

EXEMPLE

Les deux triangles EFG et MNP sont tels que :

$FG = NP$ et $\widehat{GFE} = \widehat{PNM}$.

Ils sont donc superposables.



Application 1

Soit (xy) une droite quelconque passant par le milieu O d'un segment $[AB]$. C et D sont les pieds des perpendiculaires menées de A et B sur (xy) respectivement .

Montre que les deux triangles AOC et BOD sont superposables.

2 DEUXIÈME CAS DE SUPERPOSITION DE DEUX TRIANGLES RECTANGLES

Activité

1º) Trace un angle droit $\widehat{xAy}$. Sur l'un de ses côtés, $[Ax)$ par exemple, place le point B tel que AB = 2,5 cm, et sur l'autre, $[Ay)$, le point C tel que BC = 4 cm.

Tu as ainsi construit un triangle rectangle *ABC* connaissant la mesure de son hypoténuse et un côté de l'angle droit.

2º) Fais de même pour construire un triangle KJL rectangle en K et tel que : KJ = 2,5 cm et JL = 4 cm.

3º) Fais un calque de chacun des deux triangles construits ci-dessus.

4º) Vérifie que ces deux calques sont superposables.

5º) Nomme les angles égaux de ces deux triangles.

Règle

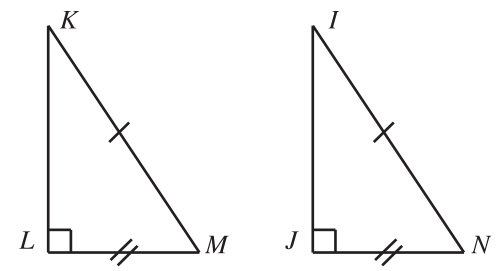
Deux **triangles rectangles**, ayant **l'hypoténuse** de l'un **isométrique** à l'hypoténuse de l'autre et un **côté de l'angle droit** de l'un **isométrique** à un côté de l'angle droit de l'autre, sont **superposables.**

Exemple

Les deux triangles KLM et IJN sont tels que :

$KM = IN$ et $LM= JN$.

Ils sont donc superposables.



Application 2

B et C sont deux points pris respectivement sur les côtés $[Ax)$ et $[Ay)$ d'un angle $\widehat{xAy}$ avec $AB = AC$.

Les perpendiculaires menées de B et C à $[Ax)$ et à $[Ay)$, respectivement, se coupent en I.

Démontre que les triangles ABI et ACI sont superposables.

Remarque

Les trois cas de superposition des triangles quelconques sont applicables aux triangles rectangles.

En particulier : deux triangles rectangles sont superposables, lorsque les côtés de l'angle droit de l'un sont respectivement isométriques aux côtés de l'angle droit de l'autre.

Application 3

Soit $[Or)$ la bissectrice d'un angle $\widehat{xOy}$. E est un point quelconque de $[Or)$. La perpendiculaire menée de E à $[Or)$, coupe $[Ox)$ et $[Oy)$ en H et K respectivement.

Démontre que les deux triangles OEH et OEK sont superposables.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Construis un triangle SOL rectangle isocèle de sommet principal O et tel que $OS = 42$ mm.

2 Construis un triangle LAC rectangle en A et tel que :

$LA = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

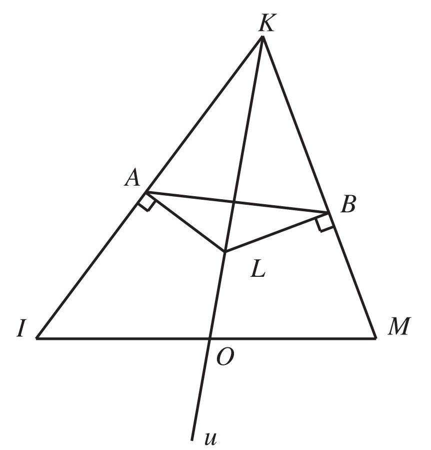
3 Construis un triangle SUD rectangle en D et tel que :

$SU = 4$ cm et $\widehat{USD} = 48°$.

4 Dans le triangle KIM, la bissectrice $[Ku)$ coupe $[IM]$ en O. D'un point L de $[KO]$, on trace les perpendiculaires (LA) et (LB) à (KI) et (KM).

1º) Montre que $KA = KB$.

2º) Montre que : $(KL) \perp (AB)$.



5 BEL est un triangle isocèle de sommet principal B. $[ET]$ et $[LS]$ sont les segments-hauteurs relatifs aux côtés isométriques.

1º) Démontre que $ET = LS$.

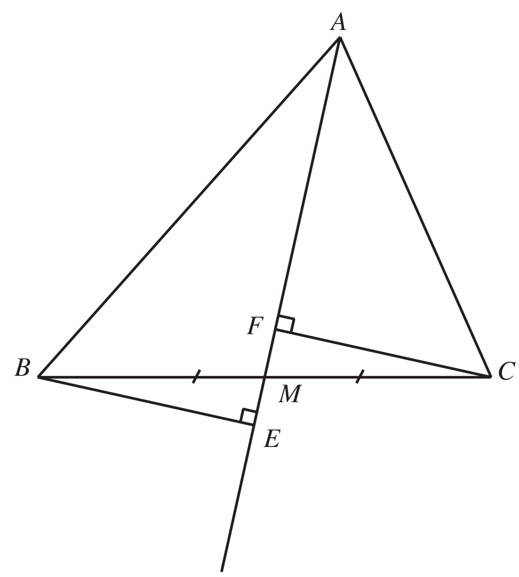
2º) Déduis que $ES = LT$ et que le triangle BST est isocèle.

6 $[AM]$ est le segment-médiane relatif à $[BC]$ d'un triangle ABC. E et F sont les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (AM).

1º) Démontre que $BE = CF$ et que M est le milieu de $[EF]$.

2º) Démontre que $CE = BF$.

3º) Démontre que les deux triangles BEF et CEF sont superposables.



7 Sur les côtés $[Ax)$ et $[Ay)$ d'un angle $\widehat{xAy}$, on marque, respectivement, les points B et C tels que $AB = AC$. L et S sont les pieds des perpendiculaires menées de B et C à $[Ay)$ et $[Ax)$ respectivement.

1º) Démontre que $BL = SC$ et que $AS = AL$.

Déduis que $BS = LC$.

2º) $[BL]$ et $[CS]$ se coupent en O. Démontre que les deux triangles BOS et COL sont superposables. Déduis que O est un point de la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

3º) Démontre que (AO) est la médiatrice de $[BC]$ et de $[SL]$.

8 Réponds par vrai ou faux.

1°) Dans un triangle rectangle, deux côtés sont perpendiculaires.

2°) Dans un triangle rectangle, chaque côté est appelé hypoténuse.

3°) Deux triangles rectangles sont superposables, lorsque l'hypoténuse de l'un est isométrique à l'hypoténuse de l'autre.

4°) Deux triangles rectangles sont superposables, lorsque les angles adjacents à l'hypoténuse de l'un sont respectivement égaux aux angles adjacents à l'hypoténuse de l'autre.

5°) Dans un triangle rectangle, les angles adjacents à l'hypoténuse sont complémentaires.

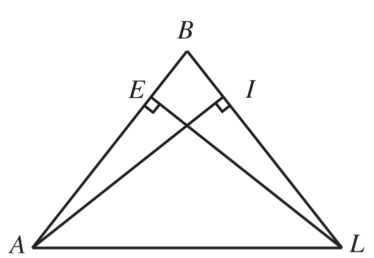
Pour chercher

9 **1°)** Construis un triangle BON tel que : $BN = 5$ cm, $BO = 3$ cm et $NO = 4$ cm.

2°) Mesure l'angle $\widehat{BON}$.

10 Dans un triangle BAL, les segments-hauteurs $[AI]$ et $[LE]$ sont isométriques.

Démontre que le triangle BAL est isocèle.



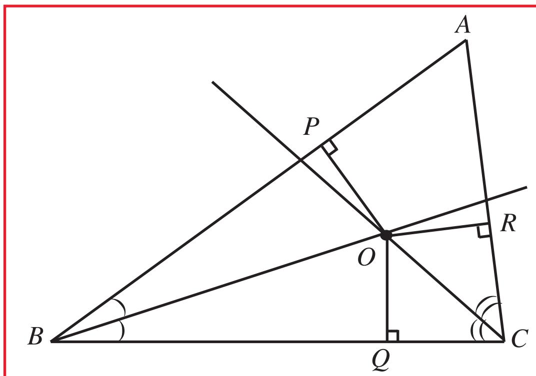
11 Sur les côtés $[Ex)$ et $[Ey)$ d'un angle $\widehat{xEy}$, on marque, respectivement, les points B et S tels que $EB = ES$. La perpendiculaire menée de B à $[Ex)$, coupe la perpendiculaire menée de S à $[Ey)$, en L.

1°) Démontre que $LB = LS$.

2°) Quelle ligne fixe décrit le point L lorsque B et S varient sur $[Ex)$ et $[Ey)$ en restant équidistants de E ?

12 ABC est un triangle quelconque.

Les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ se coupent en O.



P, Q et R sont les pieds des perpendiculaires menées de O aux droites (AB), (BC) et (AC) respectivement.

1°) Démontre que O est équidistant de (AB) et (AC).

2°) Déduis que les bissectrices des angles d'un triangle concourent en un même point.

3°) Démontre que le cercle de centre O et de rayon OP passe par R et par Q.

13 $\widehat{xTy}$ est un angle aigu; O est un point de $[Tx)$ et I un point de $[Ty)$.

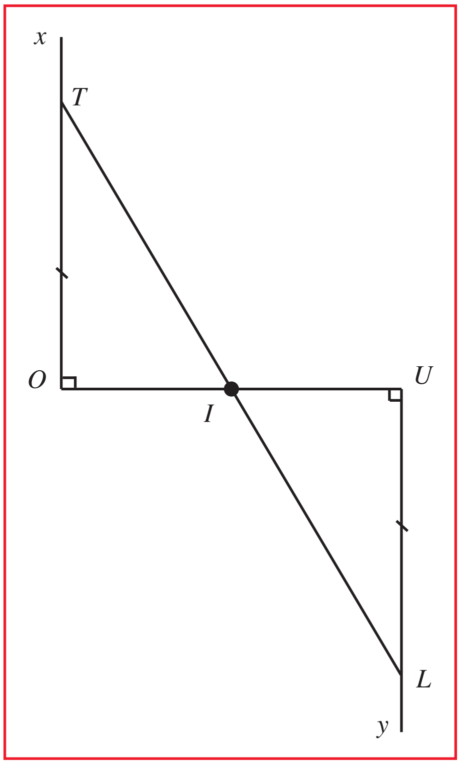
1°) Construis les bissectrices $[Os)$ et $[Iv)$ des angles $\widehat{xOI}$ et $\widehat{yIO}$. $[Os)$ et $[Iv)$ se coupent en R.

2°) Trace les perpendiculaires $[RA]$, $[RE]$ et $[RD]$ à (Tx), (OI) et (Ty) respectivement. Démontre que $RA = RE = RD$.

14 $[OU]$ est un segment de droite. On trace de part et d'autre de $[OU]$, les demi-droites $[Ox)$ et $[Uy)$ perpendiculaires à (OU).

On marque un point T sur $[Ox)$ et un point L sur $[Uy)$ tels que $OT = UL$.

Si I est le milieu de $[OU]$, montre que les deux triangles TOI et LUI sont superposables et déduis que les points T, I, L sont alignés.



TEST

1 ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. H est le milieu de $[BC]$. M est un point de la droite (BC) tel que : $CM = CA$ avec C entre M et B. E est le pied de la perpendiculaire menée de M à la droite (AC).

1°) Démontre que $ME = AH$.

(4 points)

2°) Soit F le point symétrique de C par rapport à E. Démontre que les deux triangles ABC et MCF sont superposables.

(4 points)

2 ABC est un triangle rectangle en A avec $AB < AC$. $[Bx)$ est la demi-droite tracée à l'intérieur du triangle telle que $\widehat{CBx} = \widehat{ACB}$. A' est le pied de la perpendiculaire menée de C à $[Bx)$.

1°) Démontre que les deux triangles ABC et $A'BC$ sont superposables.

(4 points)

2°) (BA') et (AC) se coupent en I. Démontre que les deux triangles IAB et $IA'C$ sont superposables.

(4 points)

3°) (BA) et (CA') se coupent en S. Démontre que (SI) et (BC) sont perpendiculaires.

(4 points)

4

RACINES CARRÉES

Objectifs

1. Reconnaître les racines carrées d'un nombre positif.

2. Rechercher les racines carrées d'un carré parfait.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Rappel

2. Activité

3. Activité

4. Usage de la calculatrice

5. Réduction des expressions contenant des radicaux

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 RAPPEL

⊙ Le carré d'un nombre est toujours positif.
$(2)^2 = 4$; $(-5)^2 = 25$.

⊙ Deux nombres opposés ont le même carré.
$(-2)^2 = 4$ et $(+2)^2 = 4$.

2 ACTIVITÉ

Quel est le nombre positif qui a pour carré 4 ? 9 ? $\frac{16}{25}$? 144 ? 0,36 ? 1 ?

Définition

⊙ ***a*** étant un nombre **positif**, il existe un **nombre positif dont le carré est *a***, qui s'appelle **la racine carrée positive de *a*** , se note $\sqrt{a}$ et se lit «radical de *a*» .

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a} \qquad (a \geq 0)$$

Le symbole $\sqrt{}$ est appelé **radical**.
a est le **radicande**.

⊙ ***a*** étant le nombre **positif dont le carré est a^2** , $\sqrt{a^2}$ est donc ***a*** .

$$\boxed{\sqrt{a^2} = a} \qquad (a \geq 0)$$

EXEMPLES

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$; $(\sqrt{0{,}1})^2 = 0{,}1$; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$;

$\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{(1{,}2)^2} = 1{,}2$; $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}$;

$\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$; $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$ car $(1{,}3)^2 = 1{,}69$.

3 ACTIVITÉ

1°) Quel est le nombre négatif qui a pour carré 4 ? 9 ? $\frac{16}{25}$? 144 ? 0,36 ? 1 ?

2°) Quels sont les nombres qui ont pour carrés 4 ? 9 ? $\frac{16}{25}$? 1 ? 0,81 ? 100 ? 0 ? $\frac{49}{81}$?

Propriétés

- $(-\sqrt{a})^2 = (+\sqrt{a})^2 = a$ (a positif).
  $-\sqrt{a}$ est la **racine carrée négative de a .**
- 0 admet une seule racine carrée qui est 0.
- $\sqrt{1} = 1$ et $-\sqrt{1} = -1$.

Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée .

EXEMPLES

- 49 admet deux racines carrées :
  l'une est positive $\sqrt{49} = 7$ et l'autre est négative $-\sqrt{49} = -7$.
- $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{(4)^2} = 4$.
- -16 n'a pas de racine carrée : $\cancel{\sqrt{-16}}$.

Application 1

1°) Calcule : $\sqrt{36}$; $-\sqrt{(1,2)^2}$; $\sqrt{\frac{25}{36}}$; $\left(\sqrt{29}\right)^2$; $\sqrt{a^4}$;
$\sqrt{(-3)^2}$; $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$.

2°) Complète les tableaux.

a	1	3	6	15	2,5	1,7	$\frac{8}{13}$	9	0,8	1,02
$(\sqrt{a})^2$										
$\sqrt{a^2}$										

a	1	4	0	...	16	...	6^2	...	100	...
$\sqrt{a}$	1	2	0	3	...	$\sqrt{8}$	...	8	...	1,5

4 USAGE DE LA CALCULATRICE

Une **calculatrice** permet de calculer la **racine carrée positive** de n'importe quel **nombre positif**, en utilisant la touche $\boxed{\sqrt{}}$.

Pour certains nombres, elle affiche la valeur exacte de la racine carrée; pour d'autres elle en affiche une valeur approximative.

EXEMPLES

- $\boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{6}\ \boxed{\sqrt{}}$ 14 ou $\boxed{\sqrt{}}\ \boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$ 14

(selon le type de la calculatrice).

- $\boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{\sqrt{}}$ 4,35889844 ou $\boxed{\sqrt{}}\ \boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{=}$ 4,35889844

(selon le type de la calculatrice).

Sans utiliser la calculatrice, on remarque que le dernier chiffre du nombre $(4{,}35889844)^2$ est 6; on déduit alors que ce nombre est différent de 19.

Le nombre 4,35889844 est donc une valeur approchée ou approximative de $\sqrt{19}$.

On a alors :

$\sqrt{19} \simeq 4{,}3$ à 10^{-1} près par défaut,

$\sqrt{19} \simeq 4{,}35$ à 10^{-2} près par défaut,

$\sqrt{19} \simeq 4{,}358$ à 10^{-3} près par défaut,

$\sqrt{19} \simeq 4{,}359$ à 10^{-3} près par excès.

Application 2

1º) Utilise ta calculatrice et donne la valeur exacte de :

$\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{2{,}56}$; $\sqrt{15\,129}$.

2º) Utilise ta calculatrice et donne la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de :

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{17}$.

5 RÉDUCTION DES EXPRESSIONS CONTENANT DES RADICAUX

$$a \times \sqrt{b} \ \text{ s'écrit } a\sqrt{b} \ \text{ avec } b \geqslant 0$$

EXEMPLES

1°) $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (7-3)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

2°) $11\sqrt{13} - 20\sqrt{13} + 9\sqrt{13} = (11-20+9)\sqrt{13} = 0 \times \sqrt{13} = 0$.

3°) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + 7\sqrt{5} - 10\sqrt{3} = (3+7)\sqrt{5} + (-2-10)\sqrt{3} = 10\sqrt{5} - 12\sqrt{3}$.

4°) $\sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$.

5°) $3\sqrt{a} + 4\sqrt{b} - 2\sqrt{a} - 9\sqrt{b} = (3-2)\sqrt{a} + (4-9)\sqrt{b} = \sqrt{a} - 5\sqrt{b}$
$(a \geq 0$ et $b \geq 0)$.

6°) $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 2^2 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$.

7°) $\left(\sqrt{11}-5\right)\left(\sqrt{11}+5\right) = \left(\sqrt{11}\right)^2 + 5\sqrt{11} - 5\sqrt{11} - 25 = 11 - 25 = -14$.

Application 3

Réduis $(x \geqslant 0 ,\ a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0)$.

1°) $5\sqrt{6} - 19\sqrt{6} + \sqrt{6}$.

2°) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 9\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$.

3°) $4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 21\sqrt{x} - 10\sqrt{x}$.

4°) $-13\sqrt{a} + 4\sqrt{b} + 3\sqrt{a} + 9\sqrt{b}$.

5°) $\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+3\right)$.

6°) $3\left(1-\sqrt{5}\right) + 2\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 **1º)** Quel est le carré de $\sqrt{34}$?

2º) Quelle est la valeur de $\left(\sqrt{34}\right)^2$?

2 **1º)** Quels sont les nombres dont le carré est 9 ? 3 ?

2º) Existe-t-il un nombre dont le carré est – 3 ?

3 Réduis les radicaux suivants.

$\sqrt{9}$; $\sqrt{\dfrac{4}{25}}$; $\sqrt{10\,000}$; $\sqrt{0{,}81}$;
$\left(\sqrt{15}\right)^2$; $\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$; $\sqrt{(-10)^2}$.

4 Calcule.

$\sqrt{(-15)^2}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt{+81}$;
$\sqrt{(-7)^2}$; $\left(-\sqrt{36}\right)^2$; $-\sqrt{(-0{,}1)^2}$.

5 Simplifie.

$\left(\sqrt{3}\right)^2$; $\left(-\sqrt{3}\right)^2$; $-\sqrt{9}$; $\sqrt{(-5)^2}$; $-\sqrt{(5)^2}$.

6 Complète les tableaux suivants.

x	– 7	– 5	– 2	0	+ 2	+ 5	+ 7
x^2							

x	49		100		$(23)^2$		$(-8)^2$
$\sqrt{x}$		5		$\sqrt{7}$		13	

7 Complète le tableau suivant.

a	–3	–1	0,2	–7	$\dfrac{-2}{5}$	+7	$\dfrac{+2}{5}$	$+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	+3
a^2										
$\sqrt{a^2}$										

8 Complète.

1º) ... est le carré de 3 .

2º) 16 est le carré de ... .

3º) 16 a pour carré ... .

4º) ... est une racine carrée de 25 .

5º) ... est la racine carrée positive de 11 .

9 Complète le tableau suivant.

a	7	49	0	19	1,44
Racine carrée positive de *a*					
Racine carrée négative de *a*					
Racines carrées de *a*					

10 Utilise ta calculatrice pour donner une valeur approchée de :

1º) $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près par défaut.

2º) $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près par défaut.

3º) $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près par défaut.

4º) $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près par défaut.

5º) $\sqrt{15}$ à 10^{-1} près par excès.

6º) $\sqrt{17}$ à 10^{-2} près par excès.

11 Ecris les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ $(b \geq 0)$.

$A = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$.

$B = 8\sqrt{5} - 17\sqrt{5}$.

$C = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 5\sqrt{7}$.

$D = 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$.

$E = 5\sqrt{y} - 12\sqrt{y} + 17\sqrt{y} - 10\sqrt{y}$ $(y \geq 0)$.

12 Trouve le nombre positif a.

1º) $\sqrt{a} = 11$. **2º)** $\sqrt{a} = 9$. **3º)** $\sqrt{a} = 0$. **4º)** $\sqrt{a} = \frac{9}{4}$.

13 Entoure, chaque fois, la bonne réponse.

$\sqrt{25} =$	-5	12,5	5
$\sqrt{-4} =$	-2	Ecriture fausse	2
3 est une racine carrée de	$\sqrt{9}$	-9	9
$\dfrac{-3}{2} =$	$\sqrt{\dfrac{9}{4}}$	$\dfrac{6}{4}$	$\dfrac{\sqrt{9}}{-\sqrt{4}}$
$\sqrt{256} =$	128	16	-16
$\sqrt{10\,000} =$	100	-100	5 000

Pour chercher

14 Effectue et réduis.

1°) $\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 1)$.

2°) $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$.

3°) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$.

4°) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}$.

5°) $(\sqrt{2} - y)\,(\sqrt{2} + y)$.

6°) $(11 + \sqrt{15})\,(11 - \sqrt{15})$.

7°) $(4 - \sqrt{x})\,(4 + \sqrt{x})$ $\quad (x \geq 0)$.

8°) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2$.

15 Soit $a = \sqrt{19 - x}$.

1°) Calcule a si $x = 3$.

2°) Peux-tu trouver la valeur numérique de a si $x = 28$?

3°) Trouve la valeur de x lorsque $a = 5$.

16 Soit $E = 2x^2 - \sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3}$.

Calcule la valeur numérique de E, lorsque :

1°) $x = 0$. **2°)** $x = 1$. **3°)** $x = \sqrt{3}$.

17 Ecris sous forme d'une puissance.

$\sqrt{10^4}$; $\sqrt{10^6}$; $\sqrt{10^8}$; $\sqrt{10^{10}}$.

18 Calcule $A = \sqrt{10^2} + \sqrt{10^4} + \sqrt{10^6}$.

19 Calcule $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $B = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$, dans chacun des cas suivants.

1º) $x = 4$ et $y = 3$.

2º) $x = 4$ et $y = -3$.

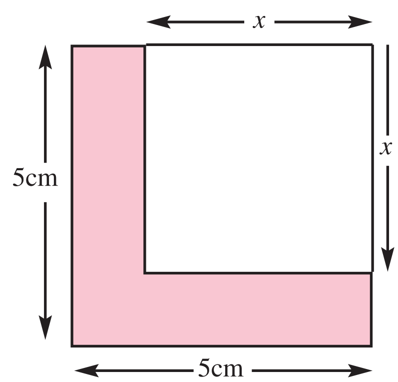
20 Donne un nombre égal à sa racine carrée positive.

21 Un triangle *ABC* est tel que :

$AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{20} - \sqrt{5}$ et $CA = \sqrt{45} - \sqrt{20}$.

Est-il équilatéral ? Justifie.

22 Dans la figure ci-contre, calcule x pour que l'aire de la surface colorée soit égale à 16 cm^2 .



TEST

1 Complète. **(2 points)**

1º) 36 est le carré de ... .

2º) 5 est la racine carrée positive de ... .

3º) ... est la racine carrée négative de 49 .

4º) 0,2 est une racine carrée de ... .

2 Ecris sans radicaux.

$\left(\sqrt{51}\right)^2$; $\sqrt{(-3)^2}$; $-\sqrt{\dfrac{1}{9}}$; $\sqrt{0{,}49}$; $-\sqrt{(17)^2}$;

$\sqrt{1 - \dfrac{7}{16}}$; $\sqrt{(\pi - 9)^2}$; $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^4}$; $\sqrt{1{,}21}$. **(3 points)**

3 Trouve a ($a \geq 0$).

$\sqrt{a} = 9$; $\sqrt{a} = 1{,}3$; $\sqrt{a} = 1$; $\sqrt{a} = \frac{3}{5}$. **(2 points)**

4 Utilise ta calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de:

$\sqrt{17}$; $+\sqrt{23}$; $\sqrt{\frac{4}{3}}$; $+\sqrt{315}$. **(2 points)**

5 Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$ ($b \geq 0$). **(2 points)**

$A = 0{,}7\sqrt{3} - 1{,}2\sqrt{3}$;

$B = +8\sqrt{19} + 2\sqrt{19} - 6\sqrt{19}$;

$C = 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - 9\sqrt{x} + \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) ;

$D = -5\sqrt{t} + 8\sqrt{t} - \sqrt{t}$ ($t \geq 0$).

6 Effectue et réduis.

$\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)$; $(\sqrt{7} - 6)(\sqrt{7} + 6)$. **(2 points)**

7 Soit $x = \sqrt{21 - y}$.

1°) Calcule x si c'est possible pour $y = -4$; $y = 20$; $y = 25$.

2°) Trouve la valeur de y sachant que $x = 4$.

8 Complète le tableau suivant. **(3 points)**

x	5	8,2	-1	$+2{,}5$	0
$\sqrt{(x-3)^2}$					
$\sqrt{(3-x)^2}$					

9 A l'aide de ta calculatrice, trouve la mesure du côté d'un terrain carré dont l'aire est égale à $231{,}04\ m^2$. **(1 point)**

5

PARALLÉLOGRAMME

Objectif

Connaître et utiliser les propriétés caractéristiques du parallélogramme.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Définition
2. Propriétés d'un parallélogramme
3. Conditions pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme
4. Exercice de construction

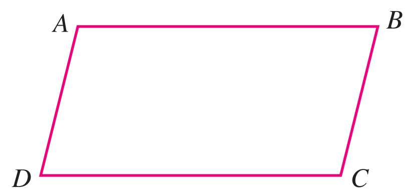
EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

COURS

1 DÉFINITION

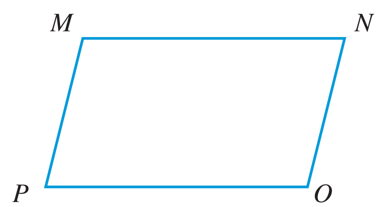
Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a les **côtés opposés parallèles**.



(AB) // (CD) et (AD) // (BC)

2 PROPRIÉTÉS D'UN PARALLÉLOGRAMME

Activité



MNOP est un quadrilatère qui a les côtés opposés parallèles.

1°) a) Démontre que les deux triangles *MNO* et *MPO* sont superposables.

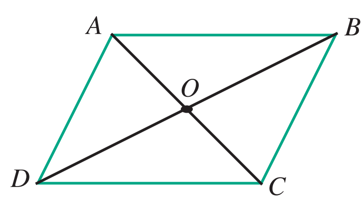
b) Trouve alors, dans *MNOP*, les côtés isométriques et les angles égaux.

2°) Les diagonales $[MO]$ et $[NP]$ se coupent en I .

a) Démontre que les deux triangles *MIN* et *PIO* sont superposables.

b) Déduis alors que I est le milieu de $[MO]$ et $[PN]$.

Propriétés



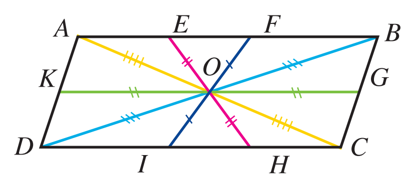
Dans un parallélogramme :

⊙ les **côtés opposés** sont **isométriques** ($AB = DC$ et $AD = BC$).

⊙ les **angles opposés** sont **égaux** ($\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ et $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$).

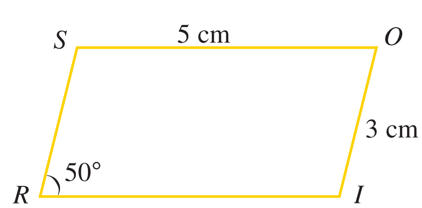
⊙ les **diagonales** se coupent en **leur milieu** ($OA = OC$ et $OB = OD$).

⊙ Le parallélogramme admet le point de rencontre de ses diagonales comme centre de symétrie.



$OA = OC$; $OB = OD$; $OI = OF$;
$OH = OE$; $OK = OG$.

Application 1



1°) a) Trouve le périmètre du parallélogramme *SOIR* ci-contre.

b) Calcule ses angles.

2°) a) Trace un segment $[MN]$ et marque un point I non situé sur (MN).

b) Construis le parallélogramme *MINE* ayant $[MN]$ pour diagonale.

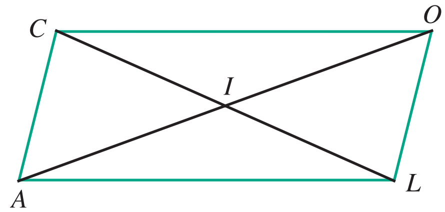
3º) Dis, dans chacun des cas suivants, si le quadrilatère *COLA* est un parallélogramme.

a) $CO = LA$ et $CA = LO$.

b) $\widehat{ACO} = \widehat{ALO}$ et $\widehat{CAL} = \widehat{COL}$.

c) $CA = LO$.

d) $IC = IO$.



3 CONDITIONS POUR QU'UN QUADRILATÈRE SOIT UN PARALLÉLOGRAMME

Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

⊙ les **côtés opposés** sont **parallèles** .

⊙ les **côtés opposés** sont **isométriques** .

⊙ **deux côtés opposés** sont **parallèles** et **isométriques** .

⊙ les **angles opposés** sont **égaux** .

⊙ les **diagonales se coupent** en **leur milieu** .

Application 2

ABC est un triangle quelconque. *E* et *F* sont les milieux respectifs de [*AB*] et [*AC*]. *H* est le symétrique de *E* par rapport à *F*.

1º) Démontre que le quadrilatère *AECH* est un parallélogramme.

2º) Démontre que *EHCB* est un parallélogramme.

4 EXERCICE DE CONSTRUCTION

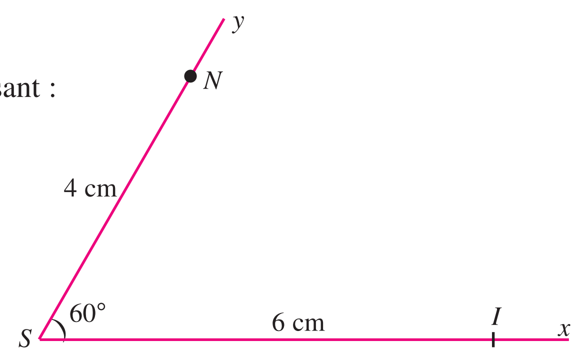
Soit à construire le parallélogramme *SIEN* connaissant :

$SI = 6$ cm, $SN = 4$ cm et $\widehat{ISN} = 60°$.

On trace l'angle $\widehat{xSy} = 60°$.

On porte sur [*Sx*) le point *I* tel que $SI = 6$ cm

et sur [*Sy*) le point *N* tel que $SN = 4$ cm.



Pour déterminer le point *E*, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

1ère méthode On mène par I la parallèle à $[SN)$ et par N la parallèle à $[SI)$; E est leur point d'intersection.

2ème méthode On mène par I la parallèle à $[SN)$; sur cette parallèle on porte une longueur $IE = SN = 4$ cm.

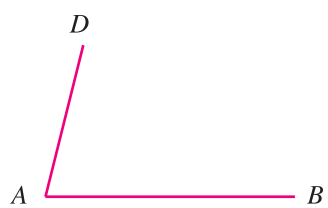
3ème méthode On détermine le milieu O de $[IN]$, puis on prolonge $[SO]$ d'une longueur $OE = SO$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester les connaissances

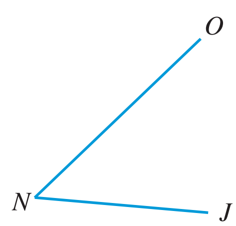
1 La construction du parallélogramme est inachevée, complète-la en justifiant la méthode.

1°)



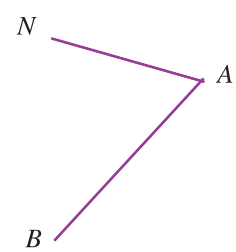
ABCD est un parallélogramme.

2°)



NOIR est un parallélogramme de centre *J*.

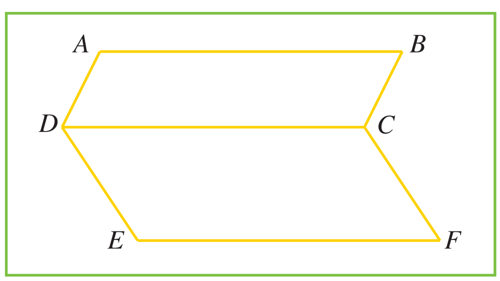
3°)



BIEN est un parallélogramme de centre *A*.

2 *ABCD* et *CDEF* sont deux parallélogrammes construits de part et d'autre de (CD).

Démontre que *ABFE* est un parallélogramme.



3 *MONT* est un parallélogramme.

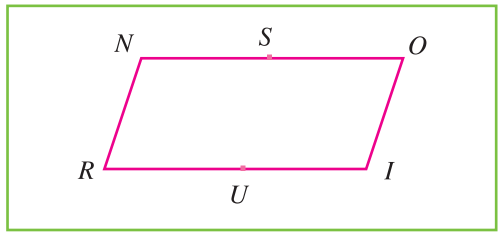
Le point A est le milieu de $[ON]$ et I le symétrique de M par rapport à A.

1°) Démontre que *MOIN* est un parallélogramme.

2°) Démontre que les points T, N et I sont alignés.

3°) Démontre que N est le milieu de $[TI]$.

4 Le quadrilatère *NOIR* est un parallélogramme. *S* est le milieu de [*ON*] et *U* celui de [*RI*].



1º) Démontre que (*SU*) // (*OI*).

2º) Démontre que le quadrilatère *SOUR* est un parallélogramme.

3º) Nomme la diagonale commune à *NOIR* et *SOUR*. Déduis alors que ces deux parallélogrammes ont le même centre de symétrie.

5 Trace un segment [*BC*] de longueur 6 cm.

1º) Construis un point A tel que la distance de *A* à (*BC*) soit égale à 5 cm.

2º) Construis le point *D* tel que *ABDC* soit un parallélogramme.

6 Construis un parallélogramme *ABCD*, dans chacun des cas suivants.

1º) $AB = 6$ cm , $AD = 4$ cm et $\widehat{BAD} = 115°$.

2º) $AB = 5$ cm , $BC = 3$ cm et $AC = 6$ cm.

7 (*d*) et (*d'*) sont deux droites sécantes en *O*. *J* est un point qui n'appartient ni à (*d*), ni à (*d'*). Soit *K* le symétrique de *O* par rapport à *J*.
La parallèle à (*d'*) passant par *K* coupe (*d*) en *A* et la parallèle à (*d*) passant par *K* coupe (*d'*) en *B*.
Démontre que *J* est le milieu de [*AB*].

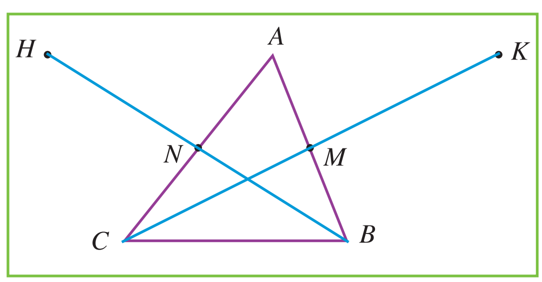
8 *ABCD* est un parallélogramme. *E* et *F* sont, respectivement, les projetés orthogonaux de *A* et *C* sur la droite (*BD*).

1º) Démontre que les triangles *AED* et *BCF* sont superposables.

2º) Démontre que *AECF* est un parallélogramme.

3º) Déduis que [*BD*] et [*EF*] ont le même milieu.

9 *ABC* est un triangle quelconque, *M* le milieu de [*AB*] et *N* celui de [*AC*]. Soit *K* le symétrique de *C* par rapport à *M* et *H* celui de *B* par rapport à *N*.



1º) Démontre que *ACBK* et *ABCH* sont deux parallélogrammes.

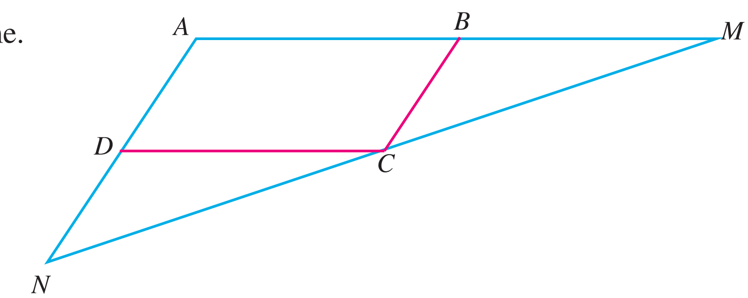
2º) Déduis que *K*, *A* et *H* sont alignés et que *A* est le milieu de [*KH*].

10 M, O et N sont trois points donnés non alignés. I est le milieu de $[OM]$ et J celui de $[ON]$.

1º) Construis le parallélogramme $JOIE$.

2º) Démontre que les trois points M, E et N sont alignés et déduis que E est le milieu de $[MN]$.

11 $ABCD$ est un parallélogramme.
On prolonge le côté $[AB]$ d'une longueur $BM = AB$.
La droite (MC) coupe (AD) en N.

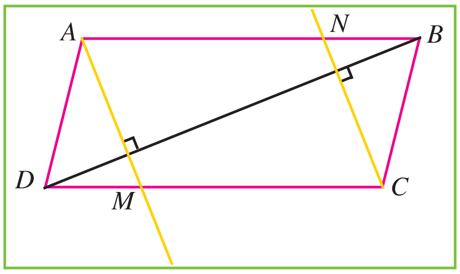


1º) Démontre que les deux triangles BMC et DCN sont superposables.

2º) Démontre que $BCND$ est un parallélogramme.

3º) Démontre que $MN = 2BD$.

12 $ABCD$ est un parallélogramme. La perpendiculaire à (BD) passant par A, coupe (CD) en M. La perpendiculaire à (BD) passant par C, coupe (AB) en N.



1º) Démontre que le quadrilatère $AMCN$ est un parallélogramme.

2º) Déduis que les segments $[AC]$, $[BD]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

3º) Démontre que $BMDN$ est un parallélogramme.

13 Réponds par vrai ou faux.

1º) Un parallélogramme admet un centre de symétrie qui est le point de rencontre de ses diagonales.

2º) Dans le parallélogramme $MNPQ$, $[MN]$ et $[PQ]$ sont les diagonales.

3º) Dans le parallélogramme $EFGH$, si $\widehat{HEF} = 70°$ alors $\widehat{HGF} = 70°$.

4º) Dans tout parallélogramme, deux côtés consécutifs sont isométriques.

5º) La somme des angles d'un parallélogramme est égale à 360°.

6º) Dans tout parallélogramme, deux côtés opposés ont la même médiatrice.

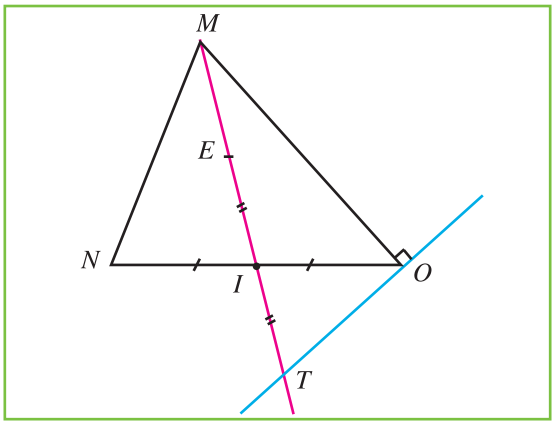
Pour chercher

14 *ABCD* est un parallélogramme et *M* le milieu de [*AB*]. Les droites (*DM*) et (*BC*) se coupent en *E*.

1º) Démontre que les triangles *AMD* et *BME* sont superposables.

2º) Démontre que :
a) *BEAD* est un parallélogramme.
b) *B* est le milieu de [*EC*].

15 Soit *MON* un triangle quelconque et *I* le milieu de [*ON*]. La perpendiculaire menée de *O* à (*MO*), coupe (*MI*) en *T*. Soit *E* le symétrique de *T* par rapport à *I*.



1º) Quelle est la nature du quadrilatère *OTNE* ? Justifie.

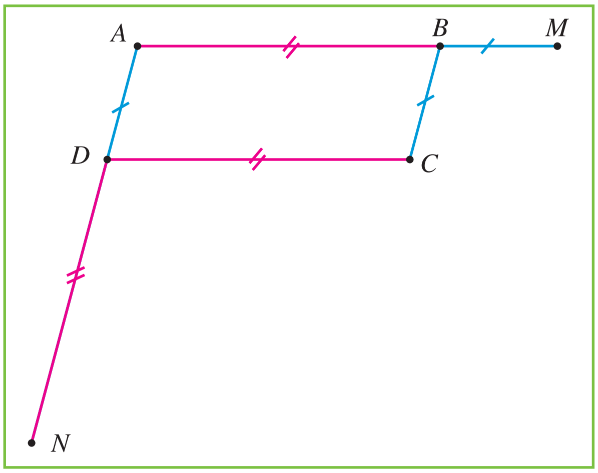
2º) Démontre que (*NE*) et (*MO*) sont perpendiculaires.

16 *ABC* est un triangle isocèle de sommet principal *A*. *M* est un point quelconque de [*BC*]. La parallèle à (*AB*), menée de *M*, coupe [*AC*] en *E* et la parallèle à (*AC*), menée de *M*, coupe [*AB*] en *F*.

1º) Démontre que le triangle *MEC* est isocèle.

2º) Démontre que le périmètre de *AEMF* est égal à $2 \times AC$.

17 On prolonge respectivement les côtés [*AB*] et [*AD*] d'un parallélogramme *ABCD* de $BM = AD$ et $DN = AB$.

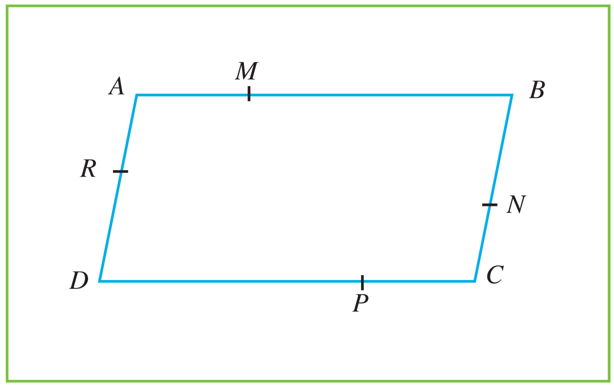


1º) Démontre que les triangles *BMC* et *DNC* sont isocèles.

2º) Démontre que les points *M*, *C* et *N* sont alignés.

18 Sur les côtés d'un parallélogramme $ABCD$ et en tournant toujours dans le même sens, on prend les longueurs égales :

$AM = BN = CP = DR$.

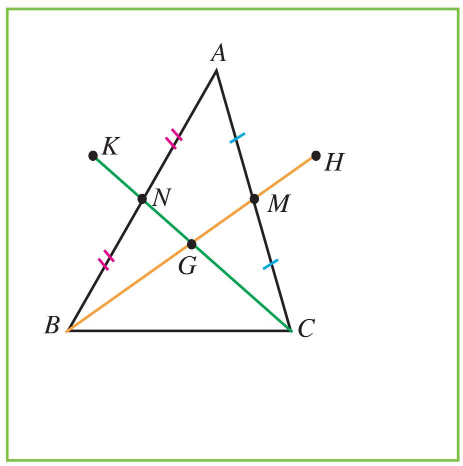


1º) Démontre que $[RN]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

2º) Démontre de même que $[AC]$ et $[MP]$ ont le même milieu.

3º) Démontre que $MNPR$ est un parallélogramme.

19 G est le centre de gravité d'un triangle ABC, M le milieu de $[AC]$ et N celui de $[AB]$. Soient H et K les symétriques de G par rapport à M et N respectivement.



1º) Démontre que $AGCH$ et $AGBK$ sont deux parallélogrammes.

2º) Démontre que $BCHK$ est un parallélogramme.

20 $ABCD$ est un parallélogramme. La bissectrice $[Ax)$ de $\widehat{DAB}$ coupe (DC) en M. La bissectrice $[Cy)$ de $\widehat{DCB}$ coupe (AB) en N.

1º) Montre que (Ax) est parallèle à (Cy).

2º) Montre que $AMCN$ est un parallélogramme.

3º) Montre que (DB) passe par le milieu O de $[MN]$; déduis que $BMDN$ est un parallélogramme.

TEST

1 **1º)** Construis un parallélogramme *NOIR* sachant que :

$NO = 8$ cm , $NR = 6$ cm et $\widehat{ONR} = 140°$. **(2 points)**

2º) Les bissectrices des angles $\widehat{NRI}$ et $\widehat{RIO}$ se coupent en *H*.

Démontre que le triangle *RHI* est rectangle. **(2 points)**

2 *ABC* est un triangle, *I* le milieu de [*AB*] et *J* celui de [*BC*].
On construit le point *F* symétrique de *A* par rapport à *J*.

1º) Démontre que *ACFB* est un parallélogramme. **(2 points)**

2º) Soit *D* le milieu de [*CF*]. **(2 points)**

Démontre que *BICD* est un parallélogramme.

3º) Démontre que *ACFB* et *BICD* ont le même centre de symétrie. **(2 points)**

3 *MON* est un triangle quelconque. *A*, *B* et *C* sont les milieux respectifs des côtés [*MO*], [*ON*] et [*MN*].

Soit *I* le symétrique de *B* par rapport à *A* et *J* celui de *B* par rapport à *C*.

1º) Démontre que *BOIM* et *BNJM* sont deux parallélogrammes. **(3 points)**

2º) Démontre que les points *I*, *M* et *J* sont alignés et que *M* est le milieu de [*IJ*].

(2 points)

4 *ABCD* est un parallélogramme. Soit *M* le symétrique de *A* par rapport à *B* et *N* celui de *A* par rapport à *D*.

1º) Démontre que (*CM*) est parallèle à (*DB*). **(3 points)**

2º) Démontre que les points *M*, *C* et *N* sont alignés et que *C* est le milieu de [*MN*].

(2 points)

6

FRACTIONS LITTÉRALES

Objectif

Effectuer des calculs avec des fractions littérales.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Fractions littérales

2. Propriétés

3. Opérations sur les fractions littérales

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 FRACTIONS LITTÉRALES

Activité

Trouve, si c'est possible :

1°) la valeur numérique de l'expression $\frac{6}{x}$ pour $x = 2$; $x = 5$; $x = 0$. Que remarques-tu ?

2°) la valeur numérique de l'expression $\frac{x+4}{x-2}$ pour $x = 5$; $x = 4$; $x = 2$. Que remarques-tu ?

Définition

Une fraction dont les termes contiennent des lettres désignant des entiers relatifs est appelée fraction littérale. Elle est définie lorsque son dénominateur est non nul.

Application 1

a, b et m sont des entiers relatifs non nuls. $\frac{5a}{7b}$ et $\frac{4}{3m}$ sont-elles deux fractions littérales ?

2 PROPRIÉTÉS

1°) Activité

Utilise la calculatrice pour calculer $\frac{-2}{5}$; $\frac{2}{-5}$ et $-\frac{2}{5}$. Que remarques-tu ?

Règle

a et b sont deux entiers non nuls, $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

2°) Activité

Utilise la calculatrice pour calculer $\frac{-3}{-8}$ et $\frac{3}{8}$. Que remarques-tu ?

Règle

a et b sont deux entiers non nuls, $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

3°) Activité

Utilise la calculatrice pour calculer $\frac{-21}{15}$ et $\frac{-7}{5}$. Que remarques-tu ?

Règle

a , b et k étant trois entiers non nuls, $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$.

Exemple

x et y étant non nuls, $\frac{x^2 y}{4xy} = \frac{x}{4}$.

Application 2

1°) Compare les deux fractions littérales $\frac{-7x}{5y}$ et $\frac{7x}{-5y}$ puis $\frac{-2m}{3m}$ et $\frac{2m}{3m}$ (x, y et m sont trois entiers relatifs non nuls).

2°) Simplifie (a, b, x, y et z sont des entiers relatifs non nuls). $\frac{3a}{9b}$; $\frac{-25xy}{35xy}$; $\frac{-7x^2y}{-21xyz}$.

3 OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS LITTÉRALES

Si a, b, c et d sont des entiers relatifs, alors :

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $(b \neq 0)$.
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ $(b \neq 0)$.
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \,.\, d}{b \,.\, d} + \frac{b \,.\, c}{b \,.\, d} = \frac{a \,.\, d + b \,.\, c}{b \,.\, d}$ $(b \neq 0$ et $d \neq 0)$.
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \,.\, d}{b \,.\, d} - \frac{b \,.\, c}{b \,.\, d} = \frac{a \,.\, d - b \,.\, c}{b \,.\, d}$ $(b \neq 0$ et $d \neq 0)$.
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ $(b \neq 0$ et $d \neq 0)$.
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \,.\, d}{b \,.\, c}$ $(b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0)$.
- $a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{c} = \frac{a \,.\, b}{c}$ $(c \neq 0)$.
- $-a \times \frac{b}{c} = \frac{-a}{1} \times \frac{b}{c} = -\frac{a \,.\, b}{c}$ $(c \neq 0)$.

EXEMPLES

(Toutes les lettres désignent des entiers relatifs non nuls).

1º) $\dfrac{2}{m}+\dfrac{t}{n}=\dfrac{2n+tm}{mn}$; **2º)** $\dfrac{-2x}{5y}\times\dfrac{-10y}{6x}=\dfrac{20xy}{30xy}=\dfrac{2}{3}$; **3º)** $\dfrac{m}{n}\div\dfrac{n}{m}=\dfrac{m}{n}\times\dfrac{m}{n}=\dfrac{m^2}{n^2}$.

Application 3

Effectue (toutes les lettres désignent des entiers relatifs non nuls).

1º) $\dfrac{2a}{x}-\dfrac{3y}{5x}$; **2º)** $\dfrac{5}{m}-\dfrac{3}{2n}$; **3º)** $\dfrac{2a}{3}+\dfrac{3a}{2}$; **4º)** $\dfrac{x}{-y}\times\dfrac{-zy}{xt}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester les connaissances

(Dans tous les exercices, les lettres figurant dans les dénominateurs désignent des entiers relatifs non nuls et celles qui sont dans les numérateurs représentent des entiers relatifs).

1 Trouve la valeur numérique de chacune des fractions littérales suivantes.

1º) $\dfrac{x}{3y}$ pour $x = 2$ et $y = 6$. ; **2º)** $\dfrac{2a}{5b}$ pour $a = -10$ et $b = -4$. ; **3º)** $\dfrac{x+1}{x-2}$ pour $x = 5$.

2 Réponds par vrai ou faux.

1º) $-\dfrac{2}{t}$ est une fraction littérale.

2º) $\dfrac{a\,.\,b}{a\,.\,c}$ n'est pas une fraction littérale.

3º) $\dfrac{-3a}{5b}=-\dfrac{3a}{5b}$.

4º) $\dfrac{5}{-a}=\dfrac{-5}{a}=+\dfrac{5}{a}$.

5º) $\dfrac{3}{m}+\dfrac{10}{n}=\dfrac{3+10}{m\,.\,n}$.

6º) $\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{5}=\dfrac{a+b}{5}$.

7º) $\dfrac{x}{y}=-0{,}6$ pour $x = 3$ et $y = -5$.

8º) $\dfrac{a^2b}{b^2a}=\dfrac{a}{b}$.

9º) $\dfrac{-m}{-n}=-\dfrac{m}{n}$.

3 Simplifie les fractions littérales suivantes.

$\dfrac{5a}{10b}$; $\dfrac{-21xyz}{35xyt}$; $\dfrac{m\,.\,n^2}{m\,.\,n\,.\,f}$;

$\dfrac{3mn}{2em}$; $\dfrac{6c^2}{24bc}$; $\dfrac{12amx^2}{4a^2mx}$.

4 Effectue les opérations suivantes.

$\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{4}$; $\dfrac{6x}{y}+\dfrac{-5x}{-3y}$;

$\dfrac{x}{5}+\dfrac{-x}{10}$; $\dfrac{2x}{5}-\dfrac{7x}{15}$.

5 Effectue et simplifie s'il y a lieu.

1°) $\dfrac{2a}{3} \times \dfrac{3b}{-4}$.　　2°) $\dfrac{-9x}{2y} \times \dfrac{y}{-3x}$.　　3°) $-4xy \times \dfrac{y}{x}$.

4°) $\dfrac{x}{y} \div \dfrac{x}{y}$.　　5°) $\dfrac{x}{y} \div \dfrac{y}{x}$.　　6°) $\dfrac{3a}{b} \div \dfrac{a}{2}$.

7°) $\dfrac{3a}{5b} \div \dfrac{6a}{-10}$.　　8°) $\dfrac{8m^2}{12} \div 4m^2$.　　9°) $-6ay^2 \div \dfrac{2ay}{5}$.

Pour chercher

6 Effectue les opérations suivantes et simplifie s'il y a lieu.

1°) $\dfrac{2a}{3} + \dfrac{3a}{2} - \dfrac{5a}{6}$.　　2°) $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$.

3°) $5a + \dfrac{b}{c}$.　　4°) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}$.

5°) $\dfrac{a-3}{3} + \dfrac{a+5}{6} + \dfrac{a-4}{9}$.

6°) $\dfrac{4x}{x-2} - \dfrac{8}{-2+x}$　$(x \neq 2)$.

7 Simplifie puis effectue s'il y a lieu.

$\dfrac{-10x^2}{9y^2} \times \dfrac{27y^3}{25x^3}$;　$\dfrac{8m^2}{12m} - 4m$;

$\dfrac{3a^2b^2}{-9a^3b}$;　$\dfrac{c^2-cd}{bc}$;　$\dfrac{-15k\ell}{20mk\ell}$.

TEST

Toutes les lettres figurant dans les dénominateurs sont des entiers relatifs non nuls.

1 Réponds par vrai ou faux. **(9 points)**

1°) $\dfrac{-5b}{7c} = \dfrac{5b}{-7c}$.

2°) $\dfrac{2}{a} + \dfrac{-b}{-a} = \dfrac{2+b}{a}$.

3°) $\dfrac{e}{f} + \dfrac{f}{e} = 1$.

4°) $\dfrac{x}{y} = -0{,}14$ pour $x = -7$ et $y = 5$.

5°) $\dfrac{mn^2}{nm^2} = \dfrac{m}{n}$.

6°) $\dfrac{3}{m} + \dfrac{7}{n} = \dfrac{3n+7m}{mn}$.

2 Simplifie les fractions littérales suivantes. **(3 points)**

1°) $\dfrac{12xyz}{-30x^2y}$.　　3°) $\dfrac{-8\,x^2y}{-24\,xy^2}$.

2°) $\dfrac{-3ab^2c^3}{9\,a^2bc^2}$.

3 Effectue les opérations suivantes et simplifie s'il y a lieu. **(8 points)**

1°) $\dfrac{x}{15} + \dfrac{-y}{5}$.　　3°) $\dfrac{16m^2}{9} \div \dfrac{8m^3}{-3}$.

2°) $\dfrac{-8a}{3b} \times \dfrac{6b}{16a}$　　4°) $\dfrac{t-2}{5} + \dfrac{t+3}{4} - \dfrac{t-8}{10}$.

7

FRACTIONS COMPOSÉES

Objectifs

1. Connaître l'inverse d'un nombre non nul.

2. Savoir diviser deux fractions.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Inverse d'un nombre non nul

2. Quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 INVERSE D'UN NOMBRE NON NUL

Activité

1°) Effectue les produits suivants : $2 \times \frac{1}{2}$; $\frac{-3}{5} \times \frac{5}{-3}$; $\frac{x}{y} \times \frac{y}{x}$ $(x \neq 0$ et $y \neq 0)$; $a \times \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$.

2°) Complète : $4 \times ... = 1$; $\frac{9}{-7} \times ... = 1$; $\frac{-3}{4} \times ... = 1$.

3°) Existe-t-il un nombre dont le produit par 0 donne 1 ?

Définition

Lorsque le **produit** de deux nombres est égal à **1**, l'un est dit **l'inverse** de l'autre.

⊙ a est un entier non nul.

$a \times \frac{1}{a} = 1$; alors l'inverse de a est $\frac{1}{a}$ et l'inverse de $\frac{1}{a}$ est a.

On écrit : $\boxed{\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a}$

⊙ a et b sont deux entiers non nuls. Comme $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$, alors les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont inverses l'une de l'autre.

$\boxed{\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}}$

⊙ Aucun nombre multiplié par 0 donne 1 .

0 n'a donc pas d'inverse.

EXEMPLES

⊙ L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$. ⊙ L'inverse de $\frac{-1}{5}$ est $\dfrac{1}{\frac{-1}{5}} = \frac{5}{-1} = -5$. ⊙ L'inverse de $\frac{5}{7}$ est $\dfrac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{5}$.

2 QUOTIENT DE $\frac{a}{b}$ PAR $\frac{c}{d}$

Activité

Utilise la calculatrice pour calculer : $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ et $\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$. Que remarques-tu ?

Règle

a, b, c et d sont des entiers tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

Diviser deux fractions revient à multiplier la première par l'inverse de la deuxième.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

L'écriture $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ s'appelle **fraction composée**.

Remarques

⊙ $\dfrac{a}{b} \div c = \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{1} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$ $(b \neq 0$ et $c \neq 0)$.

⊙ $a \div \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{1} \div \dfrac{b}{c} = \dfrac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{1} \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$ $(b \neq 0$ et $c \neq 0)$.

EXEMPLES

⊙ $2 \div 3 = 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

⊙ $\dfrac{3}{5} \div 2 = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10}$.

⊙ $\dfrac{9}{5} \div \dfrac{-4}{7} = \dfrac{9}{5} \times \dfrac{7}{-4} = -\dfrac{63}{20}$.

⊙ $0 \div \dfrac{5}{7} = 0 \times \dfrac{7}{5} = 0$.

⊙ $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{3}{7} \div \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{14}$.

⊙ $-\dfrac{14}{25} \div \dfrac{7}{6} = \dfrac{-14}{25} \times \dfrac{6}{7} = \dfrac{-2 \times 7 \times 6}{25 \times 7} = \dfrac{-12}{25}$.

⊙ $\dfrac{8}{-15} \div \dfrac{4}{-3} = \dfrac{8}{-15} \times \dfrac{-3}{4} = \dfrac{2 \times 4 \times (-3)}{(-3) \times 5 \times 4} = \dfrac{2}{5}$.

Application

Effectue et simplifie les fractions composées suivantes.

$\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{5}}$; $\dfrac{32}{21} \div \dfrac{24}{15}$; $\dfrac{\frac{x}{3}}{\frac{5x}{9}}$ $(x \neq 0)$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Complète le tableau suivant si c'est possible.

a	$\frac{3}{2}$		0		
Opposé de *a*		-4			
Inverse de *a*				$\frac{6}{11}$	$-0,4$

2 Complète.

1°) $\frac{13}{17} \times ... = 1$; **2°)** $... \times \frac{-7}{18} = 1$; **3°)** $\frac{x}{2y} \times ... = 1$ $(x \neq 0$ et $y \neq 0)$; **4°)** $-a \times ... = 1$ $(a \neq 0)$.

3 Ecris sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers relatifs.

1°) $\dfrac{1}{\frac{8}{7}}$ **2°)** $\dfrac{1}{\frac{-3}{4}}$ **3°)** $\dfrac{-\frac{1}{3}}{3}$ **4°)** $\dfrac{\frac{5}{9}}{\frac{8}{3}}$ **5°)** $\dfrac{9}{\frac{1}{3}}$

6°) $\dfrac{32}{\frac{-1}{8}}$ **7°)** $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ **8°)** $\left(\frac{-4}{15}\right) \div \left(\frac{-7}{-3}\right)$ **9°)** $\dfrac{2-\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{2}}$.

4 **1°)** Calcule, sachant que $a = \frac{5}{4}$ et $b = -\frac{2}{3}$.

$\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}$; $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}$; $\dfrac{b}{a}$.

2°) Compare alors : $\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}$.

5 Complète le tableau suivant.

Quotient non effectué	$\frac{-3}{28} \div \frac{9}{7}$	$-9 \div \frac{-21}{9}$	$\frac{72}{7} \div (-18)$	$\frac{0,6}{0,8} \div \frac{5}{4}$	$\frac{-98}{3} \div 1,2$
Signe du quotient					
Quotient effectué sous forme d'une fraction irréductible					

6 Ecris sous forme de fraction irréductible.

$$X = \frac{2 + \frac{2}{3}}{2 - \frac{2}{3}} \quad ; \quad Y = \frac{7 - \frac{1}{2}}{7 + \frac{3}{4}} \quad ; \quad Z = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}} .$$

7 Réponds par vrai ou faux.

1º) L'inverse de 4 est 0,25 .

2º) L'inverse de $\frac{1}{8}$ est $-\frac{1}{8}$.

3º) L'inverse de $-\frac{3}{7}$ est $\frac{7}{3}$.

4º) Diviser par $\frac{1}{5}$ revient à multiplier par 5.

5º) Diviser par 0,5 revient à multiplier par 2.

6º) $\frac{a}{b} \div \frac{b}{a} = 1 \quad (a \neq 0$ et $b \neq 0)$.

7º) Si un nombre est positif, alors son inverse est négatif.

8º) L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a} \quad (a \neq 0$ et $b \neq 0)$.

Pour chercher

8 Résous les équations.

1º) $6a = -3$.

2º) $-\frac{1}{3}x = 2$.

3º) $b \div 3 = \frac{6}{7}$.

4º) $-\frac{4}{5} \cdot y = \frac{8}{15}$.

5º) $z \div \left(\frac{-35}{3}\right) = \frac{18}{7}$.

6º) $\frac{2}{7} \times x = \frac{3}{14}$.

7º) $\frac{3}{4}x = \frac{5}{8}$.

8º) $\frac{x}{2} = \frac{45}{10}$.

9 Calcule.

$$A = \frac{3 + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}}{3 + \frac{1}{5} - \frac{3}{4}} \ ; \ B = \frac{4 + 0{,}5 + 7{,}5}{\frac{9}{4} - \frac{4}{3}} \ ;$$

$$C = \frac{0{,}2 - \frac{1}{10} + 0{,}02}{\frac{1}{4} + \frac{1}{100} - 0{,}04} .$$

10 Calcule la valeur numérique de $A = \frac{a \cdot b}{c}$ sachant que :

$a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{7}{4}$ et $c = \frac{5}{6}$.

11 x est un entier naturel non nul,

simplifie : $A = \dfrac{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{x}}$.

12 Soit $A = a^2 - b^2$, $B = a \cdot b$ et $C = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$, où a et b sont deux entiers relatifs non nuls.

1º) Compare C et $\frac{A}{B}$.

2º) Trouve la valeur numérique de $C + \frac{A}{B}$, lorsque $a = 5$ et $b = -4$.

13 Effectue et réduis.

$$A = \frac{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{\frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} \ ; \ B = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2 + \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}} .$$

14 Résous l'équation suivante.

$$\frac{x}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 .$$

15 L'aire d'un triangle ABC est de $100\ \text{cm}^2$. Sa hauteur relative à $[BC]$ mesure $\frac{5}{7}$ dm. Calcule la longueur de $[BC]$.

16 Un champ de $\frac{4}{5}\ \text{hm}^2$ est partagé en 12 parcelles égales. Quelle est l'aire de chaque parcelle ?

17 Un ouvrier met 14 jours pour faire les $\frac{7}{15}$ d'un ouvrage.
Quelle partie de l'ouvrage fait-il par jour ?

18 Pour traverser une rue de 16 mètres de large, combien faut-il faire de pas de $\frac{4}{7}$ du mètre ?

19 Les $\frac{3}{4}$ de mes économies sont égales à 150 000 L.L. Combien ai-je économisé ?

20 Un marchand a partagé une pièce de toile de 57 mètres en coupons de $\frac{19}{4}$ de mètres qu'il a vendus à 18 \$ le mètre.

Trouve le nombre de coupons et le prix de vente de chaque coupon.

TEST

1 Réponds par vrai ou faux. **(6 points)**

1º) L'inverse de 5 est 0,2.

2º) L'inverse de l'opposé de – 4 est $-\frac{1}{4}$.

3º) Diviser par $\frac{1}{4}$ revient à multiplier par 4.

4º) $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{-6}{8}} = -2$.

5º) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (avec b, c et d non nuls).

6º) L'inverse de $\frac{x}{y}$ est $-\frac{x}{y}$ ($x \neq 0$ et $y \neq 0$).

2 Ecris sous la forme d'une fraction irréductible. **(4 points)**

1º) $A = \dfrac{3 + \frac{3}{5}}{\frac{3}{5} - 3}$

2º) $B = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$.

3 Calcule la valeur numérique de $X = \dfrac{x \,.\, y}{z \,.\, t}$ sachant que : **(2 points)**

$x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{15}{8}$, $z = \frac{3}{2}$ et $t = -3$.

4 Soit $M = x^2 + y^2$, $P = x \,.\, y$ et $Q = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, où x et y sont deux entiers relatifs non nuls. **(4 points)**

1º) Compare Q et $\frac{M}{P}$.

2º) Trouve la valeur numérique de $\frac{M}{P} + 5Q$, lorsque $x = 3$ et $y = -2$.

5 La distance entre deux villes A et B est 105 km. Un cycliste met trois heures pour parcourir les $\frac{4}{5}$ de cette distance.

1º) Calcule, en km, la distance parcourue par le cycliste.

2º) Trouve la vitesse moyenne du cycliste. **(4 points)**

8

PARALLÉLOGRAMMES PARTICULIERS

Objectif

Caractériser le rectangle, le losange, le carré.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Rectangle

2. Losange

3. Carré

4. Résumé

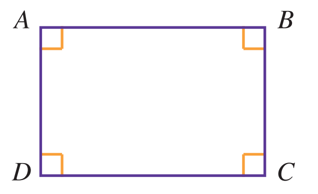
5. Constructions

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 RECTANGLE

1. Définition



Un **rectangle** est un quadrilatère ayant **quatre angles droits.**

Un rectangle est donc un parallélogramme particulier.

2. Activité

ABCD est un rectangle dont les diagonales se coupent en O .

1º) Démontre que les deux triangles *ABC* et *ABD* sont superposables. Déduis que $AC = BD$.

2º) Démontre alors que $OA = OB = OC = OD$.

3º) Trace la médiatrice (xy) de $[AB]$.
a) (xy) passe par O . Justifie.
b) (xy) est aussi la médiatrice de $[CD]$. Justifie.

4º) La droite (xy) est un axe de symétrie de la figure. Peux-tu tracer un autre ? Lequel ?

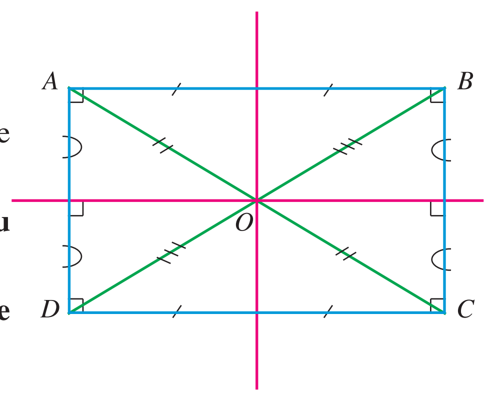
Propriétés

Dans un rectangle :

1º) les **côtés opposés** sont **parallèles** et **isométriques** (le rectangle étant un parallélogramme).

2º) les **diagonales** sont **isométriques** et **se coupent en leur milieu** qui est le centre de symétrie du rectangle.

3º) **deux côtés opposés** ont la **même médiatrice** qui est un **axe de symétrie** de la figure.
Un rectangle admet donc deux axes de symétrie.

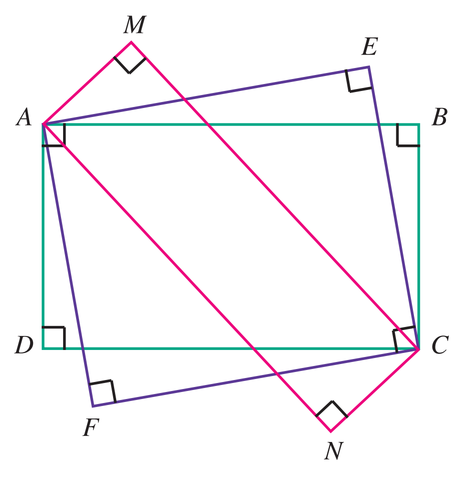


Application 1

ABCD, *AECF* et *AMCN* sont trois rectangles.

1º) Démontre que $BD = MN = EF$.

2º) Démontre que le milieu O de $[AC]$ est un centre de symétrie des trois rectangles.



3. Conditions pour qu'un quadrilatère soit un rectangle.

Un quadrilatère est un **rectangle si l'une des conditions** suivantes est **vérifiée** :

- il a les **quatre angles droits** (d'après la définition) (il suffit d'en avoir trois).

- il est un **parallélogramme et l'un des angles est droit**.

- il est un **parallélogramme ayant les diagonales isométriques**.

Application 2

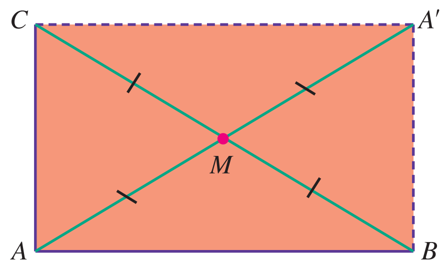
OAB est un triangle isocèle de sommet principal *O*. *C* et *D* sont, respectivement, les symétriques de *A* et *B* par rapport à *O*.
Démontre que le quadrilatère *ABCD* est un rectangle.

4. Propriété de la médiane relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle

Enoncé 1

Dans tout triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse vaut la moitié de cette hypoténuse.

Hypothèse	***Conclusion***
$\widehat{BAC} = 90°$	$AM = \dfrac{BC}{2}$
$MB = MC$	



Démonstration

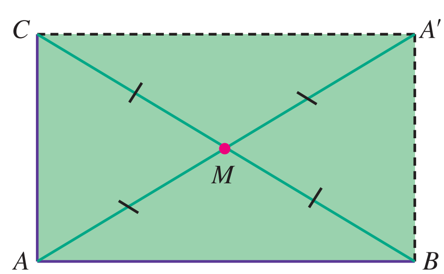
Soit A' le symétrique de A par rapport à M.
Le quadrilatère $ABA'C$, ayant les diagonales qui se coupent en leur milieu, est un parallélogramme.
L'angle A, étant droit, ce parallélogramme est un rectangle; ses diagonales sont isométriques : $AA' = BC$.

Soit alors : $AM = \dfrac{AA'}{2} = \dfrac{BC}{2}$.

Enoncé 2

Si dans un triangle *ABC*, la médiane issue de *A* vaut la moitié de *BC*, ce triangle est rectangle en *A* .

Hypothèse	***Conclusion***
$MB = MC$	$\widehat{BAC} = 90°$
$AM = \dfrac{BC}{2}$	(*ABC* est rectangle en *A*).



Démonstration

Soit A' le symétrique de A par rapport à M.

$MA = MA'$ et $MB = MC$, alors le quadrilatère $ABA'C$ est un parallélogramme.

Or $AM = \dfrac{BC}{2}$ donne $2\ AM = BC$; soit alors $AA' = BC$.

Le parallélogramme $ABA'C$ est donc un rectangle, comme ayant les diagonales isométriques.

Par suite $\widehat{BAC} = 90°$ et le triangle ABC est rectangle en A.

Application 3

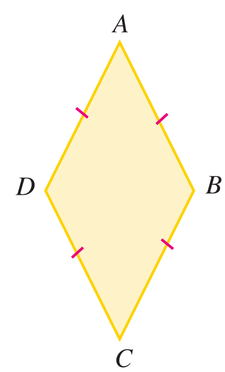
1°) $[EF]$ est un diamètre d'un cercle de centre O et de rayon R. G est un point quelconque de ce cercle, distinct de E et de F.

Démontre que le triangle GEF est rectangle.

2°) TEN est un triangle rectangle en T tel que $\widehat{TEN} = 30°$. $[TO]$ est le segment-médiane relatif à $[NE]$.

Calcule les angles de la figure obtenue.

2 LOSANGE

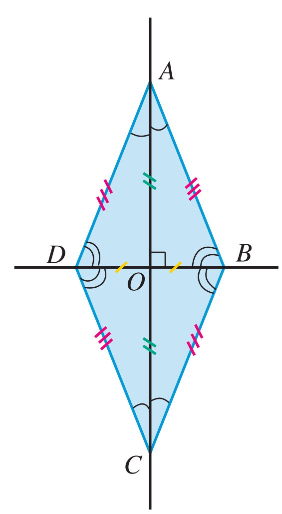


1. Définition

Un **losange** est un quadrilatère qui a les **côtés isométriques.**

Un losange est donc un parallélogramme particulier.

2. Propriétés



Dans un losange :

1°) les **côtés opposés sont parallèles** (il est un parallélogramme).

2°) les **diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.** Le support de l'une est la médiatrice de l'autre.

3°) les **supports des diagonales sont deux axes de symétrie** de la figure, et leur point commun en est un centre de symétrie.

4°) les **diagonales sont les bissectrices des angles**.

3. Conditions pour qu’un quadrilatère soit un losange.

Un quadrilatère est un **losange si l’une des conditions** suivantes **est vérifiée** :
- il a les **quatre côtés isométriques** (définition).
- il est un **parallélogramme ayant deux côtés consécutifs isométriques.**
- il est un **parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires**.
- il est un **parallélogramme ayant les diagonales bissectrices des angles**.

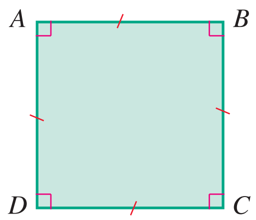
Application 4

ABC est un triangle isocèle de sommet principal *A*. *M* est le milieu de [*BC*]. *D* est le symétrique de *A* par rapport à *M*.

Démontre que le quadrilatère *ABDC* est un losange.

3 CARRÉ

1. Définition



Un **carré** est un quadrilatère qui a **quatre angles droits** et **quatre côtés isométriques.**

2. Activité

ABCD est un carré.

1°) *ABCD* est-il un rectangle ? Justifie.

2°) *ABCD* est-il un losange ? Justifie.

Propriétés

Un carré est à la fois, un rectangle et un losange. Il jouit donc des propriétés du rectangle et du losange.

3. Conditions pour qu’un quadrilatère soit un carré

1°) Un quadrilatère est un **carré** s’il a **les quatre angles droits et les quatre côtés isométriques**.

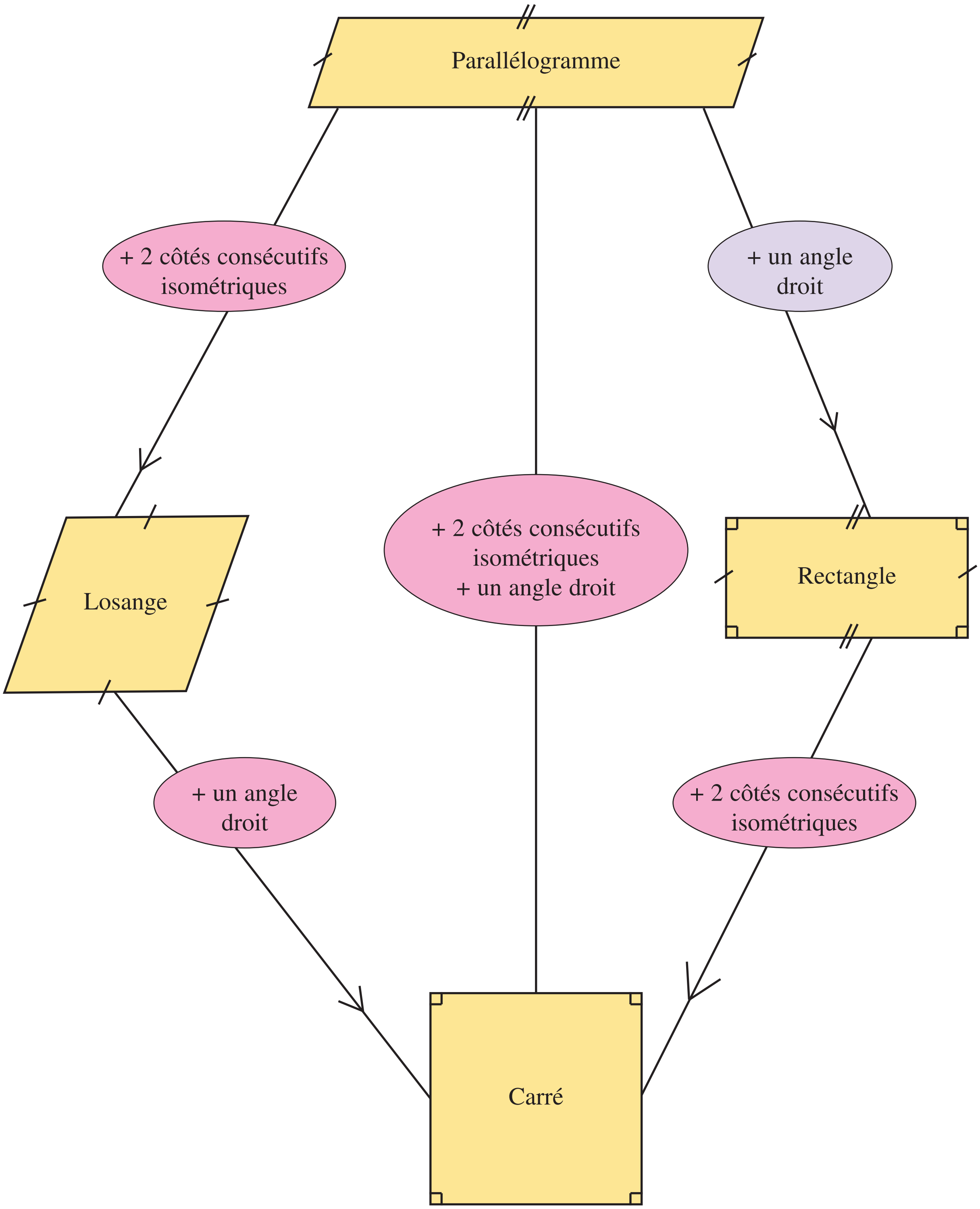
2°) Un **quadrilatère** est un **carré** s’il est, **à la fois, un rectangle et un losange.**

Application 5

AOB est un triangle rectangle isocèle de sommet principal *O*. [*OH*] est le segment-hauteur relatif à [*AB*]. *P* est le symétrique de *H* par rapport à (*OA*).

Démontre que *OHAP* est un carré.

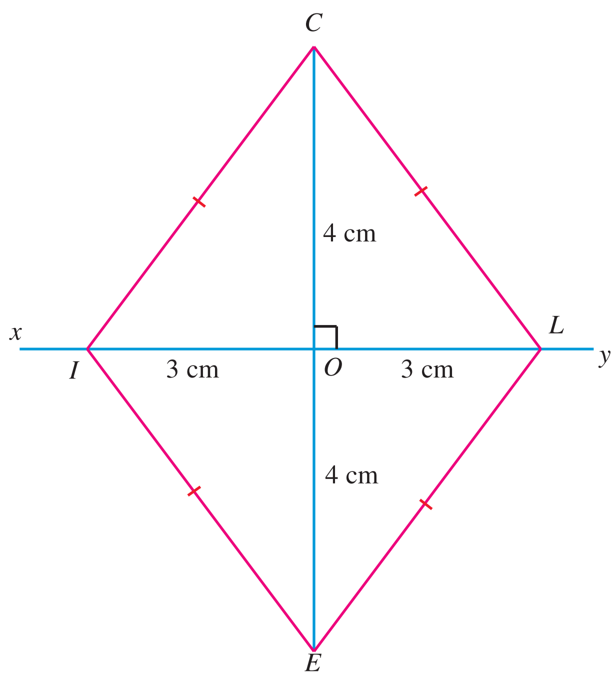
4 RÉSUMÉ



Parallélogramme
+ 2 côtés consécutifs isométriques
+ un angle droit
Losange
+ 2 côtés consécutifs isométriques
+ un angle droit
Rectangle
+ un angle droit
+ 2 côtés consécutifs isométriques
Carré

5 CONSTRUCTIONS

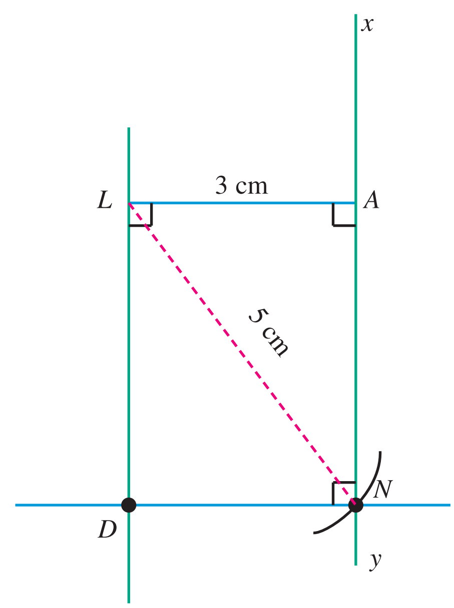
1°) Soit à construire un losange *CIEL* sachant que $CE = 8$ cm et $LI = 6$ cm.



- Les diagonales, dans un losange, sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. On trace $[CE]$ de longueur 8 cm.
  On mène du point O, milieu de $[CE]$, la droite (xy) perpendiculaire à (CE).
  On porte, sur (xy), les points I et L tels que $OI = OL = 3$ cm.
  CIEL est le losange demandé.

2°) Soit à construire un rectangle *LAND* sachant que $LA = 3$ cm et $LN = 5$ cm.

- On trace $[LA]$ de longueur 3 cm.
  LAND, étant un rectangle, $\widehat{LAN} = 90°$.
  N appartient donc à la droite (xy) perpendiculaire en A à (AL).
  Comme $LN = 5$ cm, N appartient aussi au cercle (C) de centre L et de rayon 5 cm.
  N est donc l'un des points d'intersection de (xy) et du cercle (C).
  Les perpendiculaires en N à (xy) et en L à (LA) se coupent au point D.
  LAND est le rectangle demandé.



Remarque

Le cercle (C) coupe (xy) en un autre point N' ; il existe donc un second rectangle $LAN'D'$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 $[NI]$ et $[OR]$ sont deux diamètres d'un cercle (C). Quelle est la nature du quadrilatère $NOIR$?

2 ABC est un triangle quelconque. $[AM]$ est le segment-hauteur relatif à $[BC]$. O est le milieu de $[AC]$ et N le symétrique de M par rapport à O.

Démontre que $AMCN$ est un rectangle.

3 $ABCD$ est un rectangle de centre O. P et Q sont les pieds des perpendiculaires menées de O à $[AB]$ et $[BC]$, respectivement.

1°) Démontre que P est le milieu de $[AB]$ et Q celui de $[BC]$.

2°) Démontre que le quadrilatère $OPBQ$ est un rectangle. Déduis que :

$OP = \frac{1}{2} BC$ et $OQ = \frac{1}{2} AB$.

3°) Démontre que le périmètre de $ABCD$ est le double de celui de $OPBQ$.

4 ABC est un triangle quelconque, I le milieu de $[BC]$, $[CH]$ le segment-hauteur relatif à $[AB]$ et $[BP]$ le segment-hauteur relatif à $[AC]$.

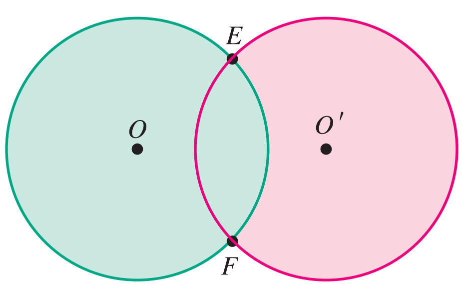
Démontre que le triangle HIP est isocèle.

5 OIE est un triangle isocèle de sommet principal O. Soit F le symétrique de I par rapport à O.

Démontre que (FE) et (IE) sont perpendiculaires.

6 Deux cercles de centres O et O' et de même rayon se coupent en E et F.

Quelle est la nature du quadrilatère $OEO'F$?

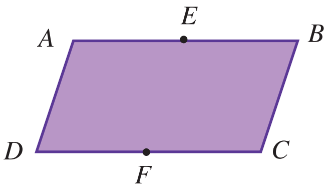


7 $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 2\ AD$.

E est le milieu de $[AB]$ et F celui de $[CD]$.

1º) Démontre que $AEFD$ et $BCFE$ sont des losanges.

2º) Démontre que le triangle AFB est rectangle.



8 ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. D est le symétrique de A par rapport à (BC) et E le symétrique de A par rapport à B.

1º) Démontre que $ACDB$ est un losange.

2º) Démontre que $BCDE$ est un parallélogramme.

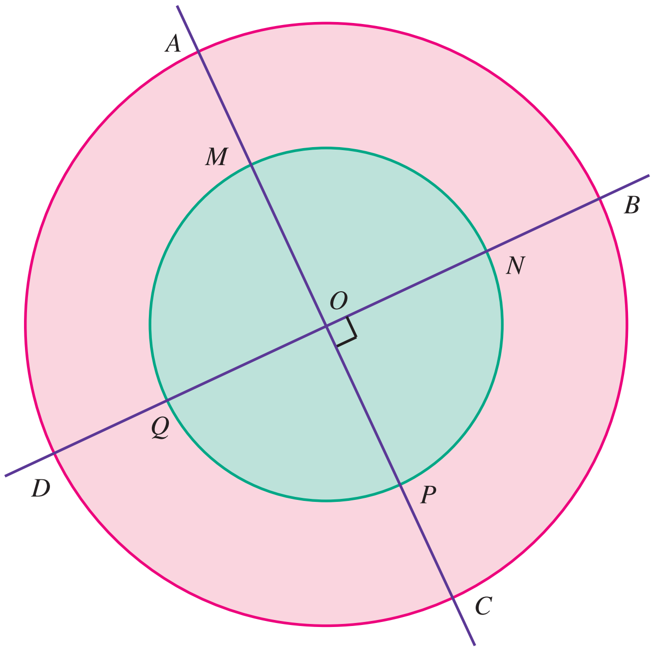
9 La figure ci-contre représente deux cercles de même centre O avec deux diamètres perpendiculaires.

1º) Cite et trace deux losanges.

Justifie.

2º) Cite et trace deux carrés.

Justifie.



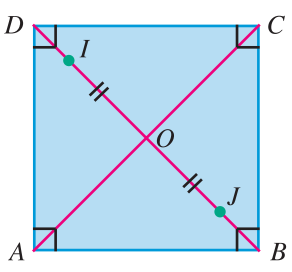
10 $ROLA$ est un losange. Le cercle de diamètre $[RL]$ coupe la droite (OA) en I et E.

Quelle est la nature du quadrilatère $LIRE$?

11 $ABCD$ est un carré de centre O.

I et J sont deux points de (BD) symétriques par rapport à O.

Quelle est la nature du quadrilatère $JAIC$?

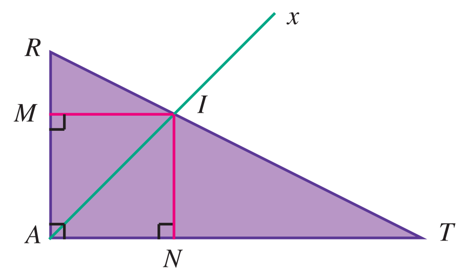


12 RAT est un triangle rectangle en A.

La bissectrice $[Ax)$ de l'angle $\widehat{RAT}$, coupe $[RT]$ en I. Soit M et N les projetés orthogonaux de I sur $[AR]$ et $[AT]$, respectivement.

1°) Démontre que $IM = IN$.

2°) Démontre que $AMIN$ est un carré.



13 Construis un rectangle $HADI$ tel que $HA = 2$ cm et $HI = 3$ cm.

14 Construis un rectangle $MATH$ tel que $AM = 4$ cm et $MT = 5$ cm.

15 Construis un losange $MONA$ de côté 5 cm et tel que $\widehat{OMN} = 60°$.

16 Construis un losange $SOIR$ tel que $SI = 6$ cm et $OR = 4$ cm.

17 Construis un carré $MONI$ dont la diagonale $[OI]$ mesure 6 cm.

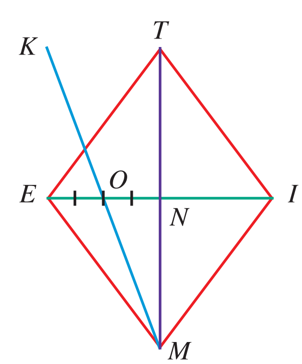
18 Réponds par vrai ou faux.

1°) Un rectangle est un parallélogramme ayant un angle droit.
2°) Deux côtés consécutifs d'un rectangle sont perpendiculaires.
3°) Les diagonales d'un rectangle sont perpendiculaires.
4°) Les diagonales d'un rectangle sont isométriques.
5°) Dans un losange, le support d'une diagonale est la médiatrice de l'autre diagonale.
6°) Les diagonales d'un losange sont isométriques.
7°) Les côtés d'un losange sont isométriques.
8°) Un carré est un losange ayant un angle droit.
9°) Les diagonales d'un carré sont isométriques.
10°) Un carré est un rectangle ayant deux côtés consécutifs isométriques.
11°) Un carré admet quatre axes de symétrie.

Pour chercher

19 $TIME$ est un losange de centre N. O est le milieu de $[EN]$ et K le symétrique de M par rapport à O.

Démontre que $KENT$ est un rectangle.



20 *ABC* est un triangle quelconque, [*AH*] est le segment-hauteur relatif à [*BC*], *M* un point quelconque de (*AH*), *E* le symétrique de *M* par rapport au milieu *I* de [*AB*] et *F* le symétrique de *M* par rapport au milieu *J* de [*AC*].

1º) Démontre que *AEBM* et *AFCM* sont deux parallélogrammes.

Déduis que (*EB*) est perpendiculaire à (*BC*).

2º) Démontre que *EFCB* est un rectangle.

21 *ABCD* est un rectangle de centre *O*. *I* est le milieu de [*OB*] et *E* le symétrique de *A* par rapport à *I*.

1º) Quelle est la nature du quadrilatère *ABEO* ? Justifie.

Déduis que : $BE = OC$.

2º) Démontre que le quadrilatère *OBEC* est un losange.

22 *O* est le centre d'un losange *ABCD*. *E, F, G* et *H* sont, respectivement, les pieds des perpendiculaires menées de *O* aux côtés [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*AD*].

1º) Quel est le rôle de [*BD*] pour $\widehat{ABC}$? Justifie.

Déduis que $OE = OF$.

2º) Démontre, de la même manière, que $OE = OH$.

3º) Démontre que le quadrilatère *EFGH* est un rectangle.

23 Soit *ABC* un triangle quelconque. *D* et *E* sont les symétriques respectifs de *B* et *C* par rapport à *A*.

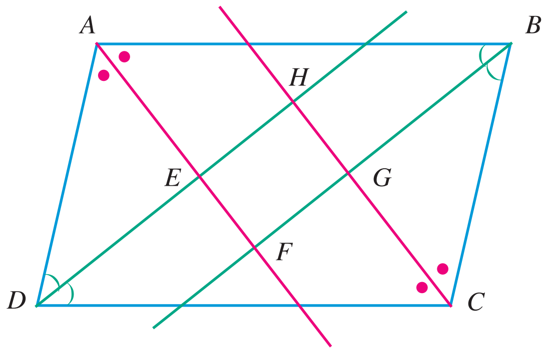
1º) Quelle est la nature de *BCDE* ? Justifie.

2º) Comment doit-être le triangle *ABC* pour que *BCDE* soit :

a) un rectangle ?
b) un losange ?
c) un carré ?

24 Les bissectrices des angles d'un parallélogramme $ABCD$ se coupent en déterminant un quadrilatère $EFGH$.

Démontre que $EFGH$ est un rectangle.



25 $ABCD$ est un rectangle de centre I.

1°) Place le point L tel que $AIBL$ soit un parallélogramme.
Démontre que $AIBL$ est un losange.

2°) Place le point N tel que $DICN$ soit un parallélogramme.
Démontre que (IN) est perpendiculaire à (DC).

3°) Démontre que les points L, I et N sont alignés.

26 DAB est un triangle isocèle rectangle en D.

1°) Place le point C tel que $DABC$ soit un parallélogramme.

2°) La bissectrice de l'angle $\widehat{ADB}$ coupe $[AB]$ en E et la bissectrice de l'angle $\widehat{DBC}$ coupe $[CD]$ en F.
Démontre que le quadrilatère $DEBF$ est un carré.

TEST

1 RON est un triangle rectangle en R. A et I sont, respectivement, les symétriques de O et N par rapport à R.

1°) Démontre que $OIAN$ est un losange. **(4 points)**

2°) F et H sont les milieux respectifs de $[RO]$ et $[RA]$. C et D sont deux points de $[IN]$ tels que $RC = RD = RF$.
Quelle est la nature de $HCFD$? Justifie. **(4 points)**

2 $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont deux angles adjacents supplémentaires. $[Ou)$ est la bissectrice de $\widehat{xOy}$ et $[Ov)$ celle de $\widehat{yOz}$. A est un point quelconque de $[Oy)$. M et N sont les pieds des perpendiculaires menées de A à $[Ou)$ et $[Ov)$, respectivement.

1°) Démontre que $AMON$ est un rectangle. **(4 points)**

2°) Démontre que : $(MN) // (xz)$. **(4 points)**

3 ABC et DBC sont deux triangles isocèles distincts construits de part et d'autre par rapport à leur base $[BC]$. Soit E le symétrique de C par rapport à A, et F le symétrique de C par rapport à D.
Démontre que les points E, B et F sont alignés. **(4 points)**

9

IDENTITÉS REMARQUABLES
DÉVELOPPEMENT
RÉDUCTION

Objectif

Effectuer des calculs en utilisant des identités remarquables.

PLAN DU CHAPITRE

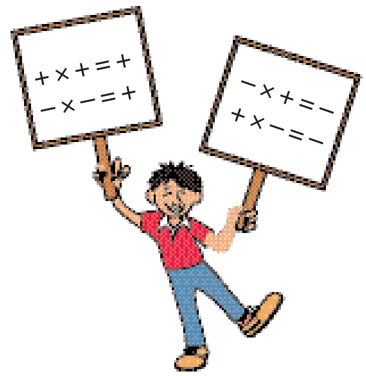
COURS

1. Rappel de quelques règles de calcul
2. Priorités opératoires
3. Développement
4. Réduction
5. Développement de quelques produits

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 RAPPEL DE QUELQUES RÈGLES DE CALCUL



Signe d'un produit

⊙ Le **produit** de deux nombres relatifs de **même signe** est un nombre **positif**.

⊙ Le **produit** de deux nombres relatifs de **signes contraires** est un nombre **négatif**.

EXEMPLES

$(+ 4) \times (+ 7) = + 28.$

$(- 6) \times (- 5) = + 30.$

$(- 3) \times (+ 9) = - 27.$

$(+ 8) \times (- 9) = - 72.$

Suppression des parenthèses

⊙ Les exemples suivants te rappellent comment supprimer des parenthèses :

$A = 5 + (a - 3{,}5) = 5 + a - 3{,}5 = a + 1{,}5$;

$B = 4 + (- a - 2{,}7) = 4 - a - 2{,}7 = - a + 1{,}3$;

$C = 3 - (x - 7{,}1) = 3 - x + 7{,}1 = - x + 10{,}1$;

$D = - 3 - (- x + 6{,}2) = - 3 + x - 6{,}2 = x - 9{,}2$.

2 PRIORITÉS OPÉRATOIRES

⊙ En l'absence des parenthèses, on doit effectuer, dans l'ordre :

1°) les puissances,
2°) les multiplications et les divisions,
3°) les additions et les soustractions.

⊙ En la présence des parenthèses, on supprime d'abord ces parenthèses puis on effectue, dans l'ordre indiqué ci-dessus.

EXEMPLES

$$\begin{aligned} E &= 3 \times (4)^2 - 2 \times 5 + 1 \\ &= 3 \times 16 - 2 \times 5 + 1 \\ &= 48 - 10 + 1 \\ &= 39 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= - 2 - (6 - 4 \times 3^2) - 4 \times 8 + 6 \\ &= - 2 - 6 + 4 \times 3^2 - 4 \times 8 + 6 \\ &= - 2 - 6 + 4 \times 9 - 4 \times 8 + 6 \\ &= - 2 - 6 + 36 - 32 + 6 \\ &= + 2 . \end{aligned}$$

3 DÉVELOPPEMENT

On rappelle que : ***k (a + b) = ka + kb.***

Remplacer $k\,(a + b)$ par $ka + kb$ c'est **développer** le produit $k\,(a + b)$.

ka et ***kb*** sont les **termes** de l'expression «$ka + kb$».

EXEMPLES

$3\,(a + 5) = 3a + 15$; $4\,(2a - 3) = 8a - 12$; $-6\,(-a + 2) = 6a - 12$.

4 RÉDUCTION

En général, il est possible de **simplifier** l'écriture de certaines expressions algébriques. On dit qu'on a **réduit** ces expressions algébriques.

EXEMPLE

Soit à réduire l'expression algébrique $E = 2\,(a - 7) - 3\,(-a + 1) - (4\,a - 10)$.

On développe : $E = 2a - 14 + 3a - 3 - 4a + 10$.

On réduit les termes semblables : $E = a - 7$.

Application 1

Réduis chacune des expressions suivantes.

$A = 2\,(a + 2b - 3) - 4\,(-a + b - 1) - (3a + b)$.

$B = 3\,(x + 9y - 5) - 2\,(4x - 2y - 7)$.

$C = 5\,(a + 3b - c) - 6\,(2a + 2b - 3c)$.

Remarques

⊙ On utilise fréquemment des écritures telles que :
$f(x) = 4x^2 + x - 2$ et $A(m) = m^3 - m + 2$
qui indiquent quelle variable intervient dans l'expression algébrique considérée.
$f(x)$ se lit «f de x», x est la variable.
$A(m)$ se lit «A de m», m est la variable.

⊙ En remplaçant, dans $f(x)$, x par 2, on obtient :
$f(2) = 4 \,.\, 2^2 + 2 - 2 = 16$.
$f(2)$, ou 16, s'appelle la **valeur numérique** de $f(x)$ pour $x = 2$.
Ainsi, la valeur numérique de $A(m)$, pour $m = -1$, est :
$A(-1) = (-1)^3 - (-1) + 2 = 2$.
$A(-1) = 2$.

EXEMPLE

Soit l'expression : $E(x) = 3(x^2 - x) - x^2 + 2x - (3x^2 + 4)$.
Elle s'écrit : $E(x) = 3x^2 - 3x - x^2 + 2x - 3x^2 - 4$
$= -x^2 - x - 4$.

Sa valeur numérique, pour $x = 0$, est : $E(0) = -0 - 0 - 4 = -4$,
et celle, pour $x = -2$, est : $E(-2) = -(-2)^2 - (-2) - 4$
$= -4 + 2 - 4$
$= -6$.

Application 2

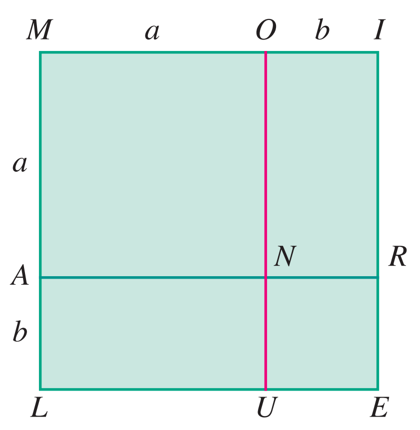
On donne l'expression algébrique : $E(x) = 5x(x - 2) - 3(x^2 + 1) - 3x + 7$.

1°) Développe et réduis $E(x)$.

2°) Calcule la valeur numérique de $E(x)$ pour : $x = 0$; $x = \frac{2}{3}$; $x = \sqrt{2}$.

5 DÉVELOPPEMENT DE QUELQUES PRODUITS

Activité



L'unité de longueur est le mètre.

MIEL est un carré. Quelle est la mesure de son côté ?

Son aire est égale à ......

Calcule, à l'aide de a et b les aires suivantes :

aire du carré *MONA* = ...

aire du carré *REUN* = ...

aire du rectangle *NOIR* = ...

aire du rectangle *LUNA* = ...

Que peux-tu dire de la somme de ces 4 aires ?

Complète alors : $(a + b)^2$ = ... + ... + ... + ...

1º) Développement de *(a + b) (c + d)*

Pour tous nombres relatifs a, b, c et d, on a :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd\ ,$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd\ .$$

(a + b) et ***(c + d)*** sont les **facteurs** du produit $(a + b)(c + d)$.

(a – b) et ***(c – d)*** sont les **facteurs** du produit $(a - b)(c - d)$.

EXEMPLE

Soit à développer et à réduire les expressions suivantes :

1º) $A = (a + 2)(b + 3)$

$A = a \times b + 3 \times a + 2 \times b + 2 \times 3$
$= ab + 3a + 2b + 6.$

2º) $B = (2a - 3)(3a + 5).$

$B = 6a^2 + 10a - 9a - 15$
$= 6a^2 + a - 15.$

Application 3

Développe, et réduis si c'est possible, les expressions algébriques suivantes.

$A = (x + 2)(2x - 5)$; $B = (3x - 4)\left(-2x - \sqrt{3}\right)$;

$C = (x + 2y)(2x - y) + (3x - 2y)(-x + y).$

2º) Identités ou produits remarquables

⊙ En remarquant que $(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)$, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\,(a+b)\\ &= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{car } a\times b = b\times a = ab).\end{aligned}$$

⊙ On calcule, de même, $(a-b)^2$ et $(a-b)\,(a+b)$:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\,(a-b)\\ &= a\times a - a\times b - b\times a + b\times b\\ &= a^2 - 2ab + b^2\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)\,(a+b) &= a\times a + a\times b - b\times a - b\times b\\ &= a^2 - b^2\,.\end{aligned}$$

$$\boxed{\Big(\underbrace{a}_{\substack{1^{er}\\ \text{terme}}} + \underbrace{b}_{\substack{2^{nd}\\ \text{terme}}}\Big)^2 = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{carré du}\\ 1^{er}}} + \underbrace{2\,ab}_{\substack{\text{2 fois le } 1^{er}\\ \text{par le } 2^{nd}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{carré du}\\ 2^{nd}}}}$$

$$\boxed{\Big(\underbrace{a}_{\substack{1^{er}\\ \text{terme}}} - \underbrace{b}_{\substack{2^{nd}\\ \text{terme}}}\Big)^2 = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{carré du}\\ 1^{er}}} - \underbrace{2\,ab}_{\substack{\text{2 fois le } 1^{er}\\ \text{par le } 2^{nd}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{carré du}\\ 2^{nd}}}}$$

$$\boxed{\Big(\underbrace{a}_{\substack{1^{er}\\ \text{terme}}} - \underbrace{b}\Big)\Big(\underbrace{a} + \underbrace{b}_{\substack{2^{nd}\\ \text{terme}}}\Big) = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{carré du}\\ 1^{er}}} - \underbrace{b^2}_{\substack{\text{carré du}\\ 2^{nd}}}}$$

EXEMPLES

1°) Soit à développer : **a)** $(x+3)^2$; **b)** $(2y-1)^2$; **c)** $(3x-2)(3x+2)$.

a) $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$

$= x^2 + 6x + 9.$

b) $(2y-1)^2 = (2y)^2 - 2 \times (2y) \times 1 + 1^2$

$= 4y^2 - 4y + 1.$

c) $(3x-2)(3x+2) = (3x)^2 - (2)^2$

$= 9x^2 - 4.$

2°) Soit à calculer rapidement : **a)** 41^2 ; **b)** 49^2 ; **c)** 59×61.

a) $41^2 = (40+1)^2$

$= 40^2 + 2 \times 40 \times 1 + 1^2$

$= 1600 + 80 + 1$

$= 1681.$

b) $49^2 = (50-1)^2$

$= 50^2 - 2 \times 50 \times 1 + 1^2$

$= 2500 - 100 + 1$

$= 2401.$

c) $59 \times 61 = (60-1)(60+1)$

$= 60^2 - 1$

$= 3600 - 1$

$= 3599.$

Application 4

1°) Développe chacune des expressions suivantes :

a) $(4x+3)^2$; **b)** $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$; **c)** $\left(4x - \frac{3}{2}\right)\left(4x + \frac{3}{2}\right)$.

2°) Calcule en utilisant des identités remarquables :

a) 51^2 ; **b)** 39^2 ; **c)** 899×901 .

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester les connaissances

1 Développe, réduis puis calcule la valeur numérique de chacune des expressions suivantes, pour $a = 3$ et $b = -4$.

1°) $E = 7 - (4 - 3a) - (2a - b) + (b - 2)$; **2°)** $F = -3 + (-14 + b) - (a - 13 + b)$.

2 On donne les deux expressions algébriques : $A(x) = x^2 - 3x + 2$ et $B(x) = 3x^2 - x - 2$.

Calcule : $A(1)$; $A(2)$; $A(0)$; $B(1)$; $B\left(-\frac{2}{3}\right)$ et $B\left(\sqrt{3}\right)$.

3 Développe et réduis :

1°) $a\,(a + b + 2) - 2a\,(a + 1)$

2°) $3\,(x^2 - 2x - 3) - 3x\,(x + 2)$

3°) $x\,(x - 5) + 5\,(x - 5)$

4°) $2 - y\,(2y - 1) + 3\,(y^2 + 1)$.

4 Développe et réduis chacune des expressions suivantes.

1°) $(a + 2)\,(b + 3)$.

2°) $(x - 6)\,(y - 4)$.

3°) $(a - 3)\,(b + 5)$.

4°) $(2x - 3)\,(2x + 3)$.

5°) $(3a - 2)\,(2a + 3)$.

6°) $(3x + 1)\,(3y - 1)$.

5 Développe.

1°) $(x + 2)^2$.

2°) $(2x + 3)^2$.

3°) $(x - \sqrt{6})^2$.

4°) $(3x - 1)^2$.

5°) $(2x + y)^2$.

6°) $(2x - y)^2$.

7°) $(3x + 2y)^2$.

8°) $(3x - 2y)^2$.

9°) $(-2x + y)^2$.

10°) $(-2x - y)^2$.

11°) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

12°) $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2$.

6 Développe.

1°) $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

2°) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right)$.

3°) $(4x-3y)\,(4x+3y)$.

4°) $\left(x+\frac{y}{2}\right)\left(x-\frac{y}{2}\right)$.

5°) $\left(a+\frac{2b}{3}\right)\left(-a+\frac{2b}{3}\right)$.

6°) $\left(2a-\frac{b}{5}\right)\left(2a+\frac{b}{5}\right)$.

7 **1°)** En utilisant le fait que : $31 = 30 + 1$ et $29 = 30 - 1$, calcule :

a) 31^2 ; **b)** 29^2 ; **c)** 31×29 .

2°) Utilise les identités remarquables et calcule.

a) 49×51. **c)** 37×43. **e)** 21^2 . **g)** 68^2 .

b) 38×42. **d)** 33×27. **f)** 39^2 . **h)** 52^2 .

8 Développe et réduis.

1°) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{3}y-3\right)$.

2°) $\left(\frac{x}{4}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{4}-\frac{2}{3}\right)$.

3°) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{2}\right)^2$.

4°) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{1}{4}\right)^2$.

9 Développe et réduis.

1°) $A = (2x+1)^2 + (x-1)\,(3x-1)$.

2°) $B = (x-3)^2 - 3x\,(2x+1)$.

3°) $C = (x-2)\,(x+2) - (x-3)^2$.

4°) $D = (x-2y)^2 + (2x+y)^2$.

5°) $E = \left(\frac{x}{2}+y\right)^2 + \left(\frac{x}{2}-y\right)^2$.

6°) $F = (3x-y)^2 - (3x+y)^2$.

10 Développe et réduis.

1°) $A = 3\,(x-5)^2 - 2\,(x-6)^2$.

2°) $B = 4\,(-x+2)^2 - 3\,(-x+8)\,(-2x+2)$.

3°) $C = 4\,(a-2)^2 - 3a\,(1-2a) - 2a + 1$.

4°) $D = (2x-3)^2 + (2x-3)\,(2x+3)$.

5°) $E = (3x-2)^2 - (-3x+2)^2$.

6°) $F = (5x-1)^2 - (5x+1)^2$.

11 Complète.

1°) $(... + 4)^2 = x^2 + ... + 16$.

2°) $(x - ...)^2 = x^2 - ... + 9$.

3°) $(... + 2)^2 = 9a^2 + ... + ...$

4°) $\left(... + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + ... + ...$

12 On donne la somme de deux termes du carré d'un binôme; trouve le troisième terme et écris le carré.

1°) $a^2 - 2ab$. **2°)** $y^2 + 8y$. **3°)** $9x^2 - 6x$. **4°)** $4a^2 + 20a$.

Pour chercher

13 Développe.

1°) $(m^2 - 4)^2$.

2°) $(2m^2 - 3a^2)^2$.

3°) $(3b^2 + 4a^3)^2$.

4°) $(\sqrt{2}\,x + y)^2$.

5°) $\left(m^3 + \frac{1}{2}\right)\left(m^3 - \frac{1}{2}\right)$.

6°) $(3c^4 + 2c^2)(3c^4 - 2c^2)$.

7°) $(-5ax^2 + 2by)(5ax^2 + 2by)$.

8°) $\left(\frac{4}{5}ax^2 + \frac{3}{2}y^3\right)\left(\frac{4}{5}ax^2 - \frac{3}{2}y^3\right)$.

9°) $(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$.

10°) $(\sqrt{7}\,x + \sqrt{5})(\sqrt{7}\,x - \sqrt{5})$.

11°) $(x\sqrt{2} - y)(y\sqrt{2} - x)$.

12°) $\left(\frac{3}{7}a^3 + \frac{7}{6}b^3\right)^2$.

14 On donne l'expression algébrique : $A(x) = (2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - 24x + 3$.

1°) Calcule : $A(0)$; $A(1)$; $A(-1)$.

2°) A-t-on la même valeur de $A(x)$ quel que soit x ? Explique.

15 Développe et réduis l'expression $E = (2x + y)^2 - (2x - y)^2 + 4$; calcule alors la valeur numérique de E pour $xy = -1$.

16 Développe $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$; calcule alors $x^2 + \frac{1}{x^2}$, dans le cas où $x + \frac{1}{x} = 3$.

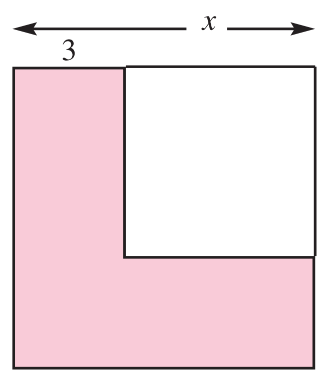
17 **1°)** On donne : $a = x + y$.

Développe $(a + 2)(a - 2)$; déduis-en le développement de $(x + y + 2)(x + y - 2)$.

2°) En faisant apparaître un produit remarquable, développe :

$(a - b - 3)(a + b + 3)$.

18 Un carré a pour côté x, exprimé en cm ($x > 3$). On diminue le côté de 3 cm.



1°) Quelle est, parmi les trois expressions algébriques suivantes, celle qui exprime la diminution de l'aire du carré :

$(x + 3)^2 - x^2$; $x^2 - (x - 3)^2$; $(x - 3)^2 - x^2$.

2°) **a)** Montre que cette diminution est égale à : $6x - 9$.

b) Calcule sa valeur numérique, lorsque le côté du carré est de 6 cm.

19 On considère les expressions : $(3 + x)^2$; $(-3 + x)^2$; $(x + 3)(3 - x)$;

$(-x - 3)^2$; $(3 - x)^2$; $(3 + x)(x - 3)$; $(-x + 3)^2$; $(-x - 3)(-x + 3)$.

Sans les développer, écris celles qui sont égales à :

1°) $(x + 3)^2$. **2°)** $(x - 3)^2$. **3°)** $(x + 3)(x - 3)$.

20 **1°)** En remarquant que $3 \times 5 = (4 - 1) \times (4 + 1)$, calcule : $4^2 - 3 \times 5$.

Calcule de même : $10^2 - 9 \times 11$; $23^2 - 22 \times 24$.

2°) Trois entiers consécutifs peuvent être désignés par : $n - 1$; n ; $n + 1$.

Développe et réduis : $n^2 - (n - 1)(n + 1)$, où $n > 1$.

Déduis-en la valeur de : $5346819^2 - 5346818 \times 5346820$.

21 Trois entiers consécutifs peuvent être désignés par : n , $n + 1$ et $n + 2$.

1°) Développe et réduis : $(n + 1)^2 - n(n + 2)$.

2°) Déduis-en la valeur de $372517^2 - 372516 + 372518$.

TEST

1 Réponds par vrai ou faux. **(4,5 points)**

1°) Quels que soient les nombres a, b et c, on a :

$2a - 3(a - 2b) + 2(a - 3b) - a + 2 = 2$.

2°) Si $E(x) = 4(x - 3) - 7(x - 3)^2$, alors $E(3) = 0$.

3°) Pour tous nombres x et y, on a : $(3x + 6y)^2 = 9x^2 + 36y^2$.

2 Relie les expressions égales. **(4,5 points)**

$a^2 - 9$ •	• $(5x + 2)^2$
$\dfrac{x^2}{4} + x + 1$ •	• $\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)$
$3a^2 - 1$ •	• $(a - 3)(a + 3)$
$25x^2 + 20x + 4$ •	• $\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)^2$
$\dfrac{x^2}{4} - 1$ •	• $\left(\dfrac{a}{3} - 1\right)^2$
$\dfrac{a^2}{9} - \dfrac{2a}{3} + 1$ •	• $(\sqrt{3}\,a + 1)(\sqrt{3}\,a - 1)$

3 Un carré a pour côté x, exprimé en cm; on augmente son côté de 2 cm.

Exprime, à l'aide de x, l'augmentation de l'aire, puis calcule cette augmentation, lorsque le côté du carré est égal à 4 cm. **(5 points)**

4 Calcule la valeur numérique de :

$A = (x + 2)^2 - 3x(y + 2) - x^2 - 2y$ et $B = (3x - y)^2 - (3x + y)^2 - 4(x + y)^2$,

sachant que $xy = -5$ et $x + y = 4$. **(6 points)**

10 FACTORISATION

Objectifs

1. Rechercher un facteur commun dans une expression algébrique.
2. Utiliser les identités remarquables pour factoriser une expression algébrique.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Factorisation
2. Identités remarquables et factorisation

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 FACTORISATION

Activité

Tu sais que :

$$ka + kb = k\,(a + b) \quad ; \quad ka - kb = k\,(a - b)$$
$$ka + kb + kc = k\,(a + b + c) \quad ; \quad ka - kb - kc = k\,(a - b - c)$$

Factorise :

1°) $3x - 9$; **2°)** $5x + 10y$; **3°)** $x + xy$

4°) $2x + 2y - 2$; **5°)** $xy + x^2 + x$; **6°)** $-5xy + 10x + 5x$.

2 IDENTITÉS REMARQUABLES ET FACTORISATION

Le tableau suivant donne la factorisation de quelques expressions algébriques.

Expression développée	Expression factorisée
$a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b)^2$
$a^2 - b^2$	$(a - b)\,(a + b)$

EXEMPLES

Soit à factoriser les expressions algébriques suivantes.

1°) A = $5x + 5y - 5z$.

Le facteur commun est 5.

D'où : A = $5\,(x + y - z)$.

2°) B = $3x + 2xy - xz$.

Le facteur commun est x.

D'où : B = $x\,(3 + 2y - z)$.

3°) C = $a^2b + a^3c + a^2d$.

a^2 apparaît dans les trois termes; a^2 est un facteur commun. D'où :

C = $a^2\,(b + ac + d)$.

4°) D = $2\,(x - 1) + 3a\,(x - 1)$.

Le facteur commun est $(x - 1)$.

D = $(x - 1)\,(2 + 3a)$.

5°) E = $(x + 1)\,(x - 2) + 6(x - 2)^2$.

E = $(x + 1)\,(x - 2) + 6(x - 2)\,(x - 2)$.

$= (x - 2)\,[(x + 1) + 6(x - 2)]$

$= (x - 2)\,(7x - 11)$.

6°) F = $(x - 5)\,(2x + 3) + x^2 - 25$.

F = $(x - 5)\,(2x + 3) + (x - 5)\,(x + 5)$

$= (x - 5)\left[(2x + 3) + (x + 5)\right]$

$= (x - 5)\,(3x + 8)$.

7°) G = $(3x + 2)^2 - (x + 5)^2$.

G est la différence de deux carrés.

G = $\left[(3x+2)+(x+5)\right]\left[(3x+2)-(x+5)\right]$

$= (4x + 7)\,(2x - 3)$.

8°) H = $9y^2 + 12y + 4 = (3y + 2)^2$.

9°) I = $4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2$.

10°) J = $ax + x + ay + y = x\,(a + 1) + y(a + 1)$

$= (a + 1)\,(x + y)$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Factorise chacune des expressions suivantes.

1º) A = $42 - 6x$. **2º)** B = $35a - 7b$. **3º)** C = $48b + 8$.

4º) D = $8a + 24b - 16$. **5º)** E = $15a - 45b + 30$. **6º)** F = $20{,}8x - 5{,}2y + 10{,}4$.

2 Le facteur commun est un monôme. Factorise.

1º) A = $2x - ax$. **2º)** B = $a^3 + 5a$. **3º)** C = $2a^3 + 3a^2$.

4º) D = $2ax + 3ab + a^2c$. **5º)** E = $4x^2 - 5yx + 4x$. **6º)** F = $5a^2 + 3a^2b - 2a^2c$.

3 Même exercice.

1º) A = $16x^3 - 32x^2$. **2º)** B = $11x^2 - 121x$. **3º)** C = $21a^2y - 14ay^2$.

4º) D = $24a^3 + 8a^2 + 16a$. **5º)** E = $15b^3 - 30b^2 + 15b$. **6º)** F = $6x^2y - 18xy^2 + 6xy$.

4 Le facteur commun est un binôme. Factorise.

1º) A = $a\,(2a - 3) - 3\,(2a - 3)$. **2º)** B = $y\,(3x + 4) + 6\,(3x + 4)$.

3º) C = $6x\,(2a + 5) - 5y\,(2a + 5)$. **4º)** D= $6a\,(3a - 2) + 12b\,(3a - 2)$.

5º) E = $4x\,(3y + 1) - 8y\,(3y + 1)$. **6º)** F = $12x\,(4a - 1) - 4\,(4a - 1)$.

5 Même exercice.

1º) A = $(a + 4)\,(2x - 3) + (a + 4)\,(3x + 1)$. **2º)** B = $(2a - 3)\,(4b - 1) - 2b\,(2a - 3)$.

4º) D = $2x\,(x + 3) - 5y\,(x + 3) + 3z\,(x + 3)$. **3º)** C = $(2a - 1)\,(4a + 9) + (4a + 9)\,(3a - 2)$.

5º) E = $6\,(2a - 3)\,(a + 7) + 18\,(2a - 3)\,(3a + 2)$. **6º)** F = $(2x - 5)\,(3x + 2) - (4x - 10)\,(5x + 4)$.

6 Factorise les différences des carrés suivantes.

1º) $4x^2 - 9$. **2º)** $(x + 4)^2 - 36$. **3º)** $y^2 - (2x + 3)^2$.

4º) $(x + 5)^2 - (9 - 2x)^2$. **5º)** $(2y - 3)^2 - (y - 5)^2$. **6º)** $(5y + 3)^2 - (7 + 2y)^2$.

7º) $(x + 2)^2 - 16\,(3x - 1)^2$. **8º)** $9\,(z + 4)^2 - 4z^2$. **9º)** $100y^2 - \frac{4}{9}y^4$.

7 Même exercice.

1º) $A = 121x^2 - 81a^2y^2$. **2º)** $B = 75a^2b^2 - 27x^2y^2$. **3º)** $C = (a-2)^2 - b^2$.

4º) $D = (2a+1)^2 - 16b^2$. **5º)** $E = \dfrac{9x^2}{25} - (y-2)^2$. **6º)** $F = 4(a-3)^2 - (b+2)^2$.

7º) $G = (2a-5)^2 - 9(3a+2)^2$. **8º)** $H = \dfrac{(x-2y)^2}{100} - \dfrac{(2x-y)^2}{36}$.

8 Les expressions suivantes sont des carrés parfaits. Factorise.

1º) $A = x^2 + 8x + 16$. **2º)** $B = 4x^2 - 12x + 9$. **3º)** $C = 121a^2 - 22a + 1$.

4º) $D = 9m^2 - 12m + 4$. **5º)** $E = 9x^2 + 3xy + \dfrac{y^2}{4}$. **6º)** $F = \dfrac{4x^2}{9} + \dfrac{4x}{3} + 1$.

9 Le facteur commun apparaît après un changement de signe. Factorise.

1º) $A = (3a-x)(b+2x) - (x-3a)(b-2x)$.

2º) $B = (x-y)(2x-y+z) + (y-x)(x-y+z)$.

3º) $C = (a-2b)(x-y) + (2b-a)$.

4º) $D = (x-y)(z-x-y) - (x+y-z)(x+2y)$.

5º) $E = (a-2b)(x-y) + (2b-a) - (a-2b)$.

10 Le facteur commun apparaît après factorisation d'une identité remarquable. Factorise.

1º) $A = x^2 + 2x + 1 - (x+1)(3x-2)$. **2º)** $B = x^2 - 16 + x(x-4)$.

3º) $C = (y+5)(2y-1) - y^2 + 25$. **4º)** $D = \dfrac{9}{4}x^2 - x + \dfrac{1}{9} + \left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{x}{3} + 1\right)$.

11 Groupe et factorise.

1º) $A = ax + by - ay - bx$. **2º)** $B = a^2x - b^2y - a^2y + b^2x$. **3º)** $C = 5bx - ay + by - 5ax$.

4º) $D = by - bx + 3ax - 3ay$. **5º)** $E = ax^2 + yz - axy - xz$. **6º)** $F = x^2 - y^2 - 7x + 7y$.

7º) $G = 9x^2 + 3xy - 3ax - ay$. **8º)** $H = 6x^2 - 6y + ay - ax^2$. **9º)** $I = yz - x^2 + xz - xy$.

10º) $J = a^2 + 2ab + b^2 - 16$.

12 Réponds par vrai ou faux.

1º) x^2 est un facteur commun des termes de la somme : $3x^2 + 2x^2y + x^3z$.

2º) Une factorisation de $4a^2 - 3b^2$ est $(2a-3b)(2a+3b)$.

3º) Une factorisation de $9a^2 - 6a + 1$ est $(3a-1)^2$.

4º) Dans l'expression : $2(a-1) - 3x(a-1)^2$, je peux mettre $(a-1)$ en facteur.

5º) Une factorisation de $ax - 2bx + x$ est $x(a-2b)$.

6º) Une factorisation de $x^2 - 100$ est $(x-10)^2$.

Pour chercher

13 Factorise les expressions suivantes.

1º) A $= 4x\,(3x-1)-(x+2)\,(3x-1)+3x-1.$

2º) B $= (2x+1)\,(4x+3)-5x\,(4x+3)+(x-1)\,(4x+3).$

3º) C $= (x-2)\,(5x-1)+(x-3)\,(5x-1)-(3x+2)\,(5x-1).$

4º) D $= (3a+1)\,(a+1)+a^2-1.$

5º) E $= 4y^2-9+(2y+3)\,(y-5).$

6º) F $= (x-3)\,(2x+7)+(2x-6)\,(3x-1)-(9-3x)\,(x+1).$

7º) G $= (4x-3)\,(-x+5)+(x-1)\,(x-5)+(2x-5)\,(-x+5).$

8º) H $= 6\,(x^2-16)-(3x+1)\,(x-4)+(8-2x)\,(x+2).$

9º) I $= (x+7)\,(3x+4)+(9x^2+24x+16).$

10º) J $= 3x^2-12+(x-4)\,(2-x)-(x^2-4x+4).$

11º) K $= (6x^2-12x+6)+(3x^2-3)-(x-1)\,(2x+1).$

12º) L $= 4x^2-4x+1-(1-2x)\,(3x+5)-12x^2+3.$

13º) M $= (3a-2)\,(2a+1)-(3a-2)^2.$

14º) N $= 2x\,(x^2-1)-x\,(x+1).$

14 Factorise les expressions suivantes.

1º) A $= a^3+a^2+a+1.$

2º) B $= xy-3x-2y+6.$

3º) C $= 2-b-2a+ab.$

4º) D $= 10xy-2+4x-5y.$

5º) E $= -x^2-y^2+a^2+b^2+2xy-2ab.$

6º) F $= 25\,(3x-y)^2-16\,(5x+3y)^2\,.$

7º) G $= \left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{5x}{4}-\dfrac{2}{3}\right)^2.$

8º) H $= (2a-3)^2-2\,(2a-3)+1.$

9º) I $= (3x+2)^2+2(3x+2)\,(x-1)+(x-1)^2.$

10º) J $= (a+4)^2-2(a+4)(2a+1)+(2a+1)^2.$

11º) K $= 4x^2-4xy+y^2-9x^2y^2\,.$

12º) L $= 5(x^2-4)-x^2+4x-4+(6-3x)(x+3).$

13º) M $= 3\,(x-1)^2-x^2+1+(x-1)\,(x+2).$

14º) N $= 25x^2+(5x-3)\,(2x+7)-9.$

15º) O $= (3x^2-25)^2-4x^4\,.$

16º) P $= (4a^2+1)^2-(5a^2-2)^2\,.$

17º) Q $= a^2-ab-b-1.$

18º) R $= x^2-4x+(x-4)^2\,.$

19º) S $= 3\,(5x-1)^2-3\,(x+2)^2\,.$

20º) T $= \left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2-\dfrac{25}{16}\,.$

21º) U $= \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{xy}{2}+\dfrac{y^2}{4}\,.$

22º) V $= x^2-7x+6.$

15 Soit l'expression $A = 6x^3-24x^2+24x$.

1º) Calcule A pour $x=-2$; $x=2$; $x=0$.

2º) Factorise A, puis calcule la valeur numérique de A pour $x=-2$; $x=2$; $x=0$.

16 On considère l'expression : $A(x) = 16 - (2x+3)^2$.

1º) Développe $A(x)$ et réduis l'expression obtenue.

2º) Factorise $A(x)$.

3º) Utilise chacune des deux expressions, développée et factorisée, et calcule la valeur numérique de $A(x)$ pour **a)** $x = 0$; **b)** $x = \frac{1}{2}$; **c)** $x = -2$; **d)** $x = -\frac{7}{2}$.

17 On donne l'expression : $E(x) = (5x-1)^2 - (7x+2)(5x-1)$.

1º) Développe et réduis $E(x)$. **2º)** Factorise $E(x)$. **3º)** Calcule $E\left(\frac{1}{5}\right)$, $E\left(-\frac{3}{2}\right)$ et $E(0)$.

18 On considère l'expression : $P(a) = (3a-2)(4a-3) - 9a^2 + 4$.

1º) Développe, réduis et ordonne $P(a)$.

2º) Factorise $P(a)$.

3º) Calcule la valeur numérique de $P(a)$, dans chacun des cas suivants :

a) $a = \frac{2}{3}$. **b)** $a = -\frac{1}{2}$. **c)** $a = 0$.

19 Soit l'expression : $A(x) = (6x-4)(x+1) - (15x-10)(4-x) + 9x^2 - 12x + 4$.

1º) Développe, réduis et ordonne $A(x)$.

2º) Factorise $A(x)$.

3º) Calcule, dans chacun des cas suivants, la valeur numérique de $A(x)$: **a)** $x = 0$. **b)** $x = \frac{2}{3}$.

4º) Quelle est l'expression (développée ou factorisée) qui nécessite le minimum d'opérations pour calculer $A(x)$, pour chacune des valeurs de x déjà données ?

20 Soit $E = x^2 + 6x + 5$.

1º) Développe $(x+3)^2$.

2º) Calcule a pour que l'on ait $E = (x+3)^2 - a$.

3º) Factorise alors E .

21 Soit $F = x^2 - 4x - 5$.

1º) Développe $(x-2)^2$.

2º) Calcule b pour que l'on ait $F = (x-2)^2 - b$.

3º) Factorise alors F .

22 Soit $G = x^2 + x - 2$.

1º) En ajoutant et en retranchant $\frac{1}{4}$ à G , montre que $G = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - c$, où c est une constante à déterminer.

2º) Factorise alors G .

23 L'aire d'un rectangle est donnée par l'expression : $10ab + 5a + 6b + 3$, où a et b sont deux nombres positifs.
Quelles expressions peuvent exprimer les dimensions de ce rectangle ?

24 L'aire d'un carré est donnée par l'expression : $9x^2 + 42x + 49$, où x est un nombre positif.
Quelle expression représente la mesure du côté de ce carré ?

TEST

1 Réponds par vrai ou faux. **(4 points)**

1°) $(y - 5)^2$ est une factorisation de $y^2 - 25$.

2°) L'expression $A = 5 \times x + 10 \times y$ est factorisée.

3°) $2x^2$ est un facteur commun des termes de la somme : $4x^2y + 8x^2y^2 - 6x^3z$.

4°) Dans l'expression : $(2a - 4)(a + 3) - (a^2 - 4)$, je peux mettre $(a - 2)$ en facteur.

2 Factorise. **(3 points)**

1°) $ax + ay$; **2°)** $x^2 + xy$; **3°)** $ax + ay + x^2 + xy$.

3 Factorise. **(6 points)**

1°) $\mathrm{A} = (5x - 3)(x - 6) - (x + 4)(6 - 10x)$.

2°) $\mathrm{B} = (x - 5)(4 - x) + \left(2 - \frac{x}{2}\right)(x + 8)$.

3°) $\mathrm{C} = \frac{1}{100}(x - 1)^2 - 1$.

4°) $\mathrm{D} = 4(x - 2)^2 - 9(2x + 1)^2$.

4 Soit l'expression : $A(x) = (2x - 3)(x + 2) - 12x^2 + 27 + (2x - 3)^2$.

1°) Développe, réduis et ordonne $A(x)$, puis calcule :
$A(0)$; $A\left(\frac{3}{2}\right)$; $A\left(-\frac{10}{3}\right)$. **(2 points)**

2°) Décompose $A(x)$ en un produit de facteurs, puis calcule :
$A(0)$; $A\left(-\frac{10}{3}\right)$; $A(5)$. **(2 points)**

5 Soit $A = x^2 - 7x + 6$.

1°) Développe $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$.

2°) Calcule la constante k pour que l'on ait $A = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + k$.

3°) Factorise alors A . **(3 points)**

11 TRAPÈZE THÉORÈME DES MILIEUX

Objectifs

1. Caractériser un trapèze.

2. Connaître et utiliser le théorème des milieux dans un triangle et dans un trapèze.

3. Reconnaître et utiliser les propriétés d'un trapèze isocèle.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Définition d'un trapèze

2. Trapèzes particuliers

3. Propriétés d'un trapèze isocèle

4. Comment démontrer qu'un trapèze est isocèle

5. Théorème des milieux

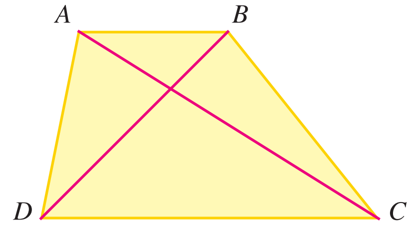
6. Propriétés

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

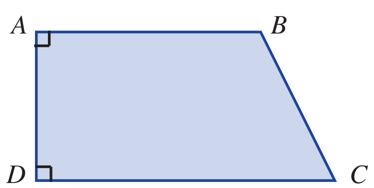
1 DÉFINITION D'UN TRAPÈZE

Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles. Il en résulte que tout parallélogramme est un trapèze.
Dans ce qui suit, on se limitera aux trapèzes qui ont seulement deux côtés parallèles.
La figure ci-contre représente un trapèze *ABCD*.



- Les côtés [*AB*] et [*CD*] sont parallèles;
  [*CD*] est la **grande base**, **[*AB*]** est la **petite base**.
- [*AD*] et [*BC*] sont les côtés non parallèles.
- [*AC*] et [*BD*] sont les diagonales.
- La distance entre les deux bases est la **hauteur** du trapèze.

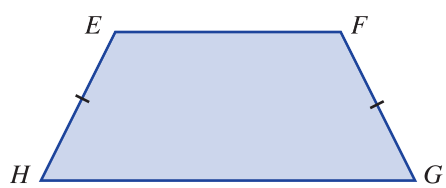
2 TRAPÈZES PARTICULIERS



Trapèze rectangle

$\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90°$

[*AD*] est la hauteur du trapèze



Trapèze isocèle

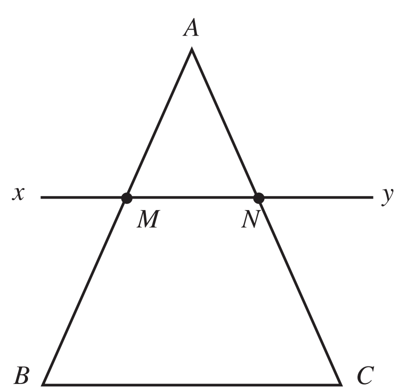
Les côtés non parallèles sont isométriques : *EH* = *FG*

3 PROPRIÉTÉS D'UN TRAPÈZE ISOCÈLE

Activité

On donne un triangle isocèle *ABC* de sommet principal *A*. (*xy*) est une droite parallèle à (*BC*) ; (*xy*) coupe [*AB*] en *M* et [*AC*] en *N*.

1°) Démontre que le triangle *AMN* est isocèle.
Déduis que $MB = NC$.



2º) Les côtés opposés du quadrilatère *MNCB* sont-ils parallèles ?
Nomme les angles égaux dans ce quadrilatère. Justifie.

3º) Démontre que les deux triangles *MBC* et *NCB* sont superposables.
Déduis que $MC = NB$.

4º) [*MN*] et [*BC*] ont la même médiatrice; justifie. Construis cette médiatrice.
Cette médiatrice est-elle un axe de symétrie de la figure ?

Propriétés

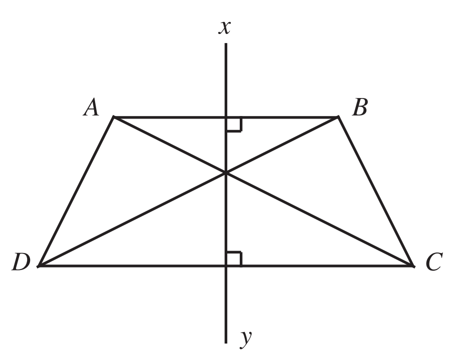
Dans un **trapèze isocèle** :

1º) les **angles adjacents à la grande base sont égaux**.
Il en est **de même** pour **les angles adjacents à la petite base**.

2º) les **diagonales** sont **superposables** (isométriques).

3º) les **bases ont la même médiatrice**. Cette médiatrice est l'axe de symétrie du trapèze.

EXEMPLE



Le trapèze *ABCD* ci-contre est isocèle, alors :

- $AD = BC$.
- $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$.
- $AC = BD$.
- (xy) est la médiatrice des deux bases [*AB*] et [*DC*]. (xy) est l'axe de symétrie du trapèze.

Application 1

ABCD est un trapèze isocèle de bases [*AB*] et [*CD*] et tel que $\widehat{BAD} = 75°$.

Calcule les autres angles de ce trapèze.

4 COMMENT DÉMONTRER QU'UN TRAPÈZE EST ISOCÈLE ?

Pour démontrer qu'un **trapèze est isocèle**, il suffit de prouver **l'une des propriétés** suivantes :
1°) les angles adjacents à l'une des deux bases sont égaux.
2°) les deux côtés non parallèles sont superposables.
3°) les diagonales sont superposables.
4°) les deux bases ont la même médiatrice.

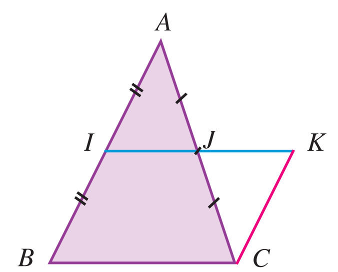
Application 2

ABCD est un rectangle. *M* et *N* sont deux points de [*AB*] tels que $AM = BN$.

Démontre que les points *M, N, C* et *D* sont les sommets d'un trapèze isocèle.

5 THÉORÈME DES MILIEUX

Activité



ABC est un triangle quelconque, *I* le milieu de [*AB*], *J* celui de [*AC*] et *K* le symétrique de *I* par rapport à *J*.

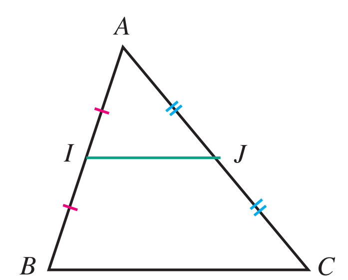
1°) Démontre que le quadrilatère *AKCI* est un parallélogramme.
Déduis que $CK = BI$.

2°) Démontre que *CKIB* est un parallélogramme.
Déduis que : $(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \frac{1}{2} BC$.

Théorème

Le segment, joignant les milieux de deux côtés d'un triangle, est parallèle au troisième côté et vaut sa moitié.

EXEMPLE



Dans le triangle *ABC* ci-contre, *I* est le milieu de [*AB*] et *J* celui de [*AC*], alors :

$(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \frac{BC}{2}$.

Application 3

ABC est un triangle rectangle en *A*. *M, I* et *J* sont les milieux respectifs des côtés [*BC*], [*AC*] et [*AB*].

Utilise le théorème des milieux pour démontrer que *AMC* et *AMB* sont deux triangles isocèles.

Déduis que $AM = \frac{1}{2} BC$.

6 PROPRIÉTÉS

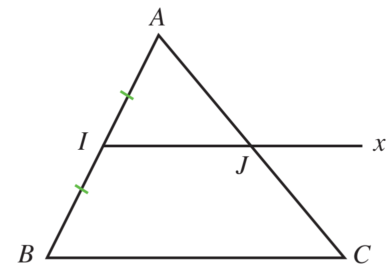
Propriété 1

Dans un triangle, **la droite menée du milieu d'un côté parallèlement à un autre, passe par le milieu du troisième côté**.

EXEMPLE

Dans le triangle ABC ci-contre, I est le milieu de $[AB]$; (Ix) est parallèle à (BC).

Alors (Ix) passe par le milieu J de $[AC]$.

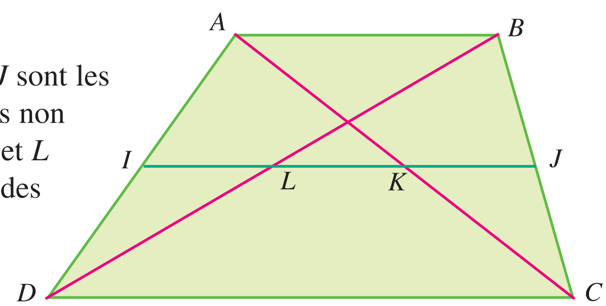


Application 4

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. La parallèle, menée de O à (AB), coupe $[AD]$ en I et $[BC]$ en J.

Démontre que I est le milieu de $[AD]$ et que J est le milieu de $[BC]$.

Propriété 2



$ABCD$ est un trapèze. I et J sont les milieux respectifs des côtés non parallèles $[AD]$ et $[BC]$. K et L sont les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
Alors :

1°) I, L, K et J sont alignés. $(IJ) // (AB) // (CD)$.

([IJ] s'appelle la base moyenne du trapèze).

2°) $IJ = \dfrac{AB + CD}{2}$ (la demi-somme des bases du trapèze).

3°) $LK = \dfrac{CD - AB}{2}$ (la demi-différence des bases du trapèze).

Démonstration

1°) Dans le triangle ABD, I est le milieu de $[AD]$ et L celui de $[BD]$. Alors (IL) est parallèle à (AB) et $IL = \dfrac{1}{2} AB$.

De même : dans le triangle DBC, $(LJ) \mathbin{//} (DC)$ et $LJ = \frac{1}{2} CD$;

dans le triangle ABC, $(JK) \mathbin{//} (AB)$ et $JK = \frac{1}{2} AB$.

Les deux droites (IL) et (LJ) passent par L et sont parallèles à (AB) et (CD); elles sont donc confondues.

Par suite I, L et J sont alignés.

Les deux droites (LJ) et (JK) passent par J et sont parallèles à (CD) et (AB); elles sont donc confondues.

Par suite L, J et K sont alignés.

On en déduit que les quatre points I, L, K et J sont alignés.

2°) $IJ = IL + LJ = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD = \frac{AB + CD}{2}$.

3°) $LK = LJ - JK = \frac{1}{2} CD - \frac{1}{2} AB = \frac{CD - AB}{2}$.

Application 5

$ABCD$ est un trapèze. $[AB]$ en est la petite base de mesure 4 cm et $[CD]$ la grande base de mesure 6 cm. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$, $[AC]$ et $[BD]$.
Calcule KL et la base moyenne du trapèze.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 $ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que : $\widehat{BAD} = 60°$.
Calcule les autres angles de ce trapèze.

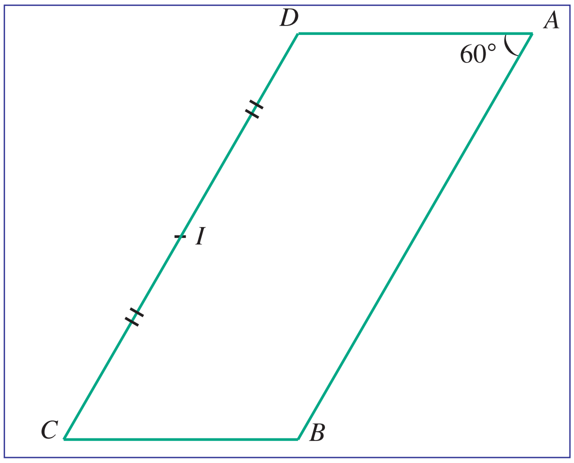
2 $ABCD$ est un parallélogramme

tel que : $AB = 2AD$, $\widehat{BAD} = 60°$

et I le milieu de $[CD]$.

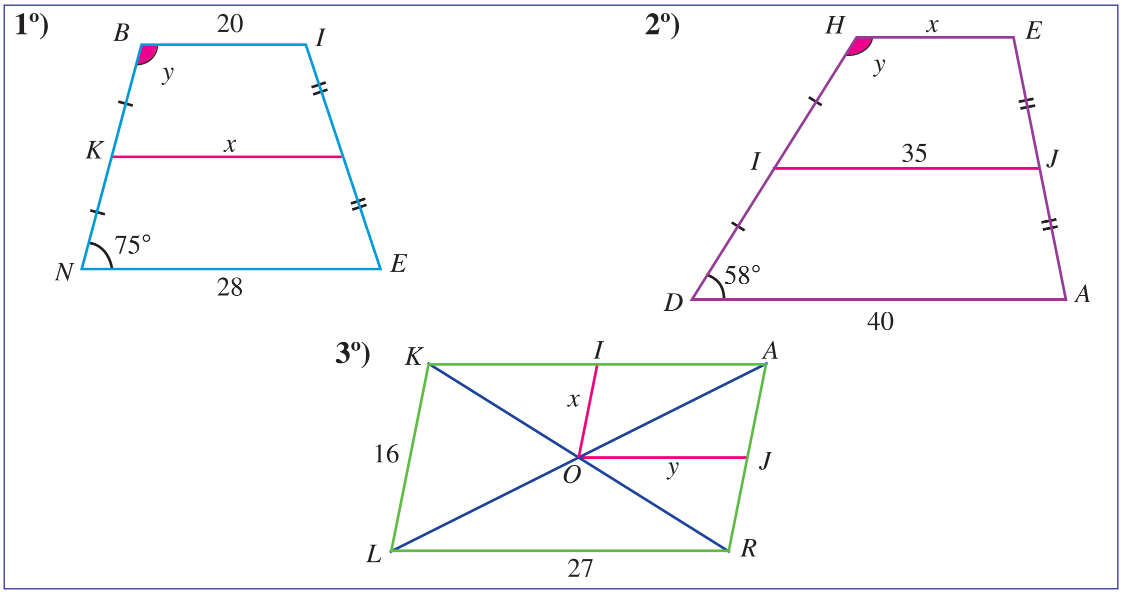
1°) Quelle est la nature du triangle BIC ?

2°) Démontre que $ABID$ est un trapèze isocèle.



3 ABC est un triangle équilatéral de périmètre 12 cm. M, N et P sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
Calcule le périmètre du triangle MNP.

4 Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur de x et celle de y.



5 $ABCD$ est un parallélogramme, I le milieu de $[CD]$ et A' le symétrique de A par rapport à I.

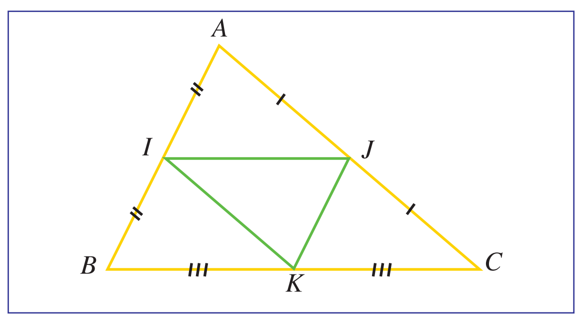
1°) Démontre que A' , C et B sont alignés. Quelle est la position de C sur $[A'B]$?

2°) Si O est le centre du parallélogramme $ABCD$, démontre que $OI = \frac{1}{4} BA'$.

6 Observe la figure ci-contre.

Cite tous les parallélogrammes ayant pour sommets des points marqués sur la figure.

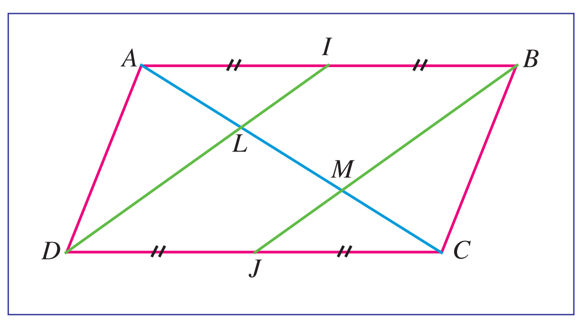
Justifie.



7 $ABCD$ est un parallélogramme.

1°) Démontre que $IBJD$ est un parallélogramme.

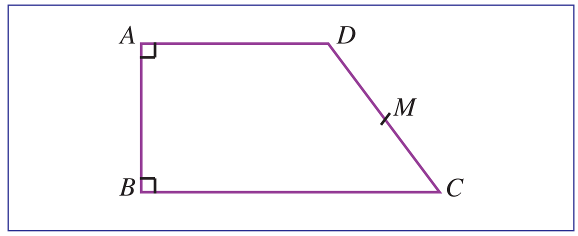
2°) Démontre que $LM = \frac{1}{3} AC$.



8 $ABCD$ est un trapèze rectangle en A et B.

Soit M le milieu de $[CD]$.

Démontre que $MA = MB$.



9 $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. E, F, G et H sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

Démontre que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

10 On considère un triangle quelconque BEL et on désigne par A et M les milieux respectifs de $[BE]$ et $[EL]$. Les segments $[BM]$ et $[LA]$ se coupent en O.

Soit R le milieu de $[BO]$ et I celui de $[LO]$.

Démontre que le quadrilatère $RAMI$ est un parallélogramme.

11 $ABCD$ est un losange. M, N, P et Q sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

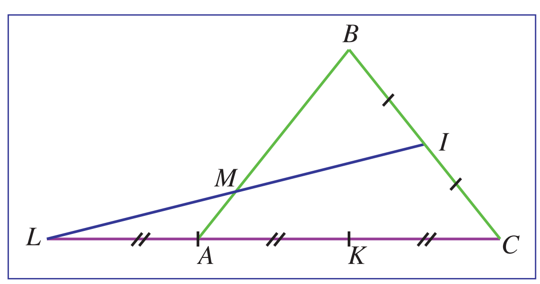
Démontre que $MNPQ$ est un rectangle.

12 $[AB]$ et $[CD]$ sont, respectivement, la petite et la grande base d'un trapèze $ABCD$. On prolonge les côtés $[AD]$ et $[BC]$ jusqu'à leur rencontre en E; soit M, N, P et Q les milieux respectifs de $[AE]$, $[BE]$, $[AC]$ et $[BD]$. On joint M à N et P à Q.

Démontre que $MNPQ$ est un trapèze.

13 I est le milieu de $[BC]$, K celui de $[AC]$ et L le symétrique de K par rapport à A.

Démontre que $AM = \frac{1}{4} AB$.



14 Réponds par vrai ou faux.

1°) Dans un trapèze, deux côtés sont parallèles.

2°) Dans un trapèze isocèle, les côtés opposés non parallèles sont isométriques.

3°) Dans un trapèze isocèle, les quatre angles sont égaux.

4°) Dans un trapèze, les diagonales sont isométriques.

5°) Dans un trapèze isocèle, les diagonales se coupent en leur milieu.

6°) Dans un trapèze, les deux bases ont la même médiatrice.

7°) Dans un trapèze, la base moyenne est le segment joignant les milieux des bases.

8°) Dans un triangle, le segment ayant pour extrémités les milieux de deux côtés, est parallèle au troisième côté et vaut sa moitié.

9°) La base moyenne d'un trapèze vaut la demi-différence des bases de ce trapèze.

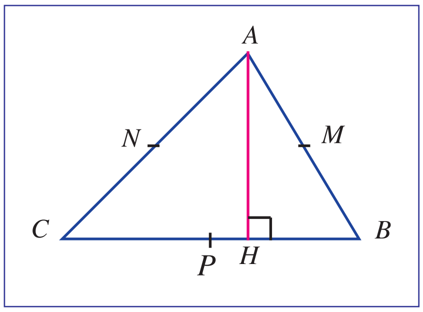
10°) Dans un triangle, la droite menée du milieu d'un côté, parallèlement à un autre, passe par le milieu du troisième côté.

Pour chercher

15 RAT est un triangle quelconque, $[AM]$ le segment-médiane et O le milieu de $[AM]$. (RO) coupe $[AT]$ en D. Soit I le milieu de $[TD]$.

Démontre que : $MI = \frac{1}{2} RD$, $TD = 2DA$ et $OD = \frac{1}{4} RD$.

16 ABC est un triangle quelconque. M, N et P sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. $[AH]$ est le segment-hauteur relatif au côté $[BC]$.

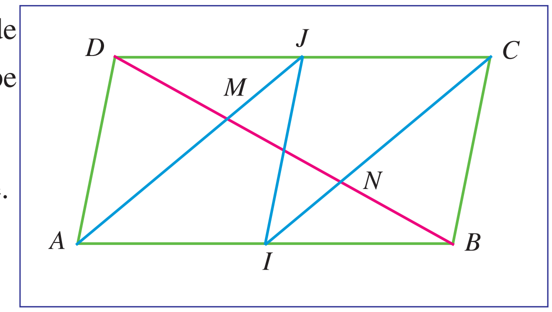


Démontre que les points M, N, P et H sont les sommets d'un trapèze isocèle.

17 $ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AB]$ et $[DC]$. Les bissectrices des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{ABC}$ se coupent en I, et les bissectrices des angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent en J.

Démontre que (IJ) est l'axe de symétrie de $ABCD$.

18 $ABCD$ est un parallélogramme, I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[DC]$. La droite (BD) coupe (AJ) en M et (CI) en N.



1°) Montre que $AICJ$ est un parallélogramme.

2°) Démontre que M est le milieu de $[DN]$.

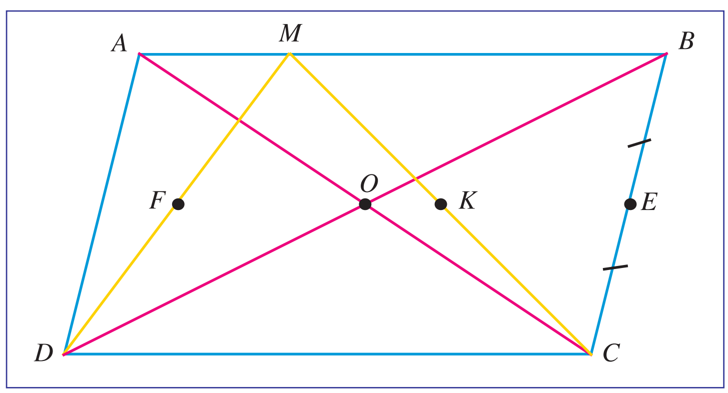
19 Dans un triangle ABC, $[AM]$ est le segment-médiane relatif à $[BC]$ et O le milieu de $[AM]$. (BO) coupe $[AC]$ en D. Soit E le milieu de $[DC]$.

1°) Démontre que $BMED$ est un trapèze.

2°) Démontre que D est le milieu de $[AE]$; déduis que $CD = 2AD$.

3°) Démontre que $OD = \dfrac{1}{4} BD$.

20 $ABCD$ est un parallélogramme de centre O tel que $AB = 7$ cm et $AD = 4$ cm. M est un point de $[AB]$ tel que $AM = x$. E et F sont les milieux de $[BC]$ et $[DM]$, respectivement. K est le milieu de $[MC]$.

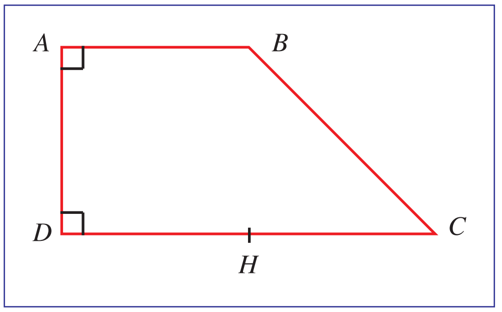


1°) Démontre que les points E, K, O et F sont alignés.

2°) **a)** Calcule EO.

b) Exprime OK et EF à l'aide de x.

21 $ABCD$ est un trapèze rectangle de hauteur $[AD]$ et tel que $DC = 2AB = 2AD$.



Soit H le milieu de $[DC]$.

1º) Démontre que $[AH]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu I.

2º) Calcule les angles du trapèze $ABCD$.

3º) Démontre que $[AC]$ et $[BH]$ se coupent en leur milieu O.

4º) Exprime OI à l'aide de CD.

22 E, F, G et H sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ d'un quadrilatère $ABCD$.

1º) Démontre que $EFGH$ est un parallélogramme.

2º) Dans quel cas, $EFGH$ est-il :

a) un rectangle ?

b) un losange ?

c) un carré ?

TEST

1 M, N et P sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ d'un triangle ABC.

Démontre que le périmètre du triangle MNP vaut la moitié de celui du triangle ABC.

(6 points)

2 I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC. Soit E le milieu de $[BI]$ et F celui de $[CJ]$.

Démontre que $EF = \frac{3}{4} BC$. **(6 points)**

3 $ABCD$ est un trapèze isocèle dans lequel $[AB]$ est la grande base. M et N sont les milieux respectifs de $[BD]$ et $[AC]$. H et P sont les projetés orthogonaux de C et D, respectifvement, sur $[AB]$.

1º) Démontre que $BH = AP$. **(4 points)**

2º) Démontre que $MN = BH$. **(1 point)**

Déduis que $MNHB$ est un parallélogramme. **(3 points)**

12 EQUATIONS DU TYPE $(ax + b)(cx + d) = 0$

Objectif

Résoudre des équations qui se ramènent à la forme :

$(ax + b)(cx + d) = 0$

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Rappel : résolution de l'équation $ax = b$

2. Équation du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$

3. Résolution des équations qui se ramènent à la forme : $(ax + b)(cx + d) = 0$

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 RAPPEL : RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $ax = b$

Activité

1°) Calcule y si $2y + 7 = 15$.

2°) La valeur $x = -4$ est-elle solution de l'équation : $3x + 5 = x - 3$?

3°) Peux-tu calculer x si $2x + 4 = 2x + 1,5$?

4°) L'équation $3x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$ a-t-elle des solutions ?

Règle

$ax = b$, avec $a \neq 0$, admet $x = \frac{b}{a}$ comme solution

$0x = b$, avec $b \neq 0$, n'admet aucune solution

$0x = 0$ admet tout nombre comme solution

EXEMPLES

- $4x + 5 = x - 4$ est équivalente à $3x = -9$, d'où $x = -3$.
- $2x + 1 = 2(x + 2)$ est équivalente à $0x = 3$. Cette équation n'admet aucune solution.
- $3(x + 2) = 3x + 6$ est équivalente à $0x = 0$. Cette équation admet tout nombre comme solution.
- $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{3}$ est équivalente à $-\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$, d'où $x = -\frac{1}{2}$.

Application 1

Résous chacune des équations suivantes.

1°) $5,2(x + 0,5) = 2(x - 1,3)$. **2°)** $2\left(\frac{2x}{3} + 1\right) = \frac{4x}{3} + 9,5$. **3°)** $3(-x + 3) = -3x + 9$.

2 EQUATION DU TYPE : $(ax + b)(cx + d) = 0$

Activité

Soit l'expression $F = (2x - 1)(x + 5)$.

1°) Résous l'équation : $2x - 1 = 0$. Complète alors : pour $x = \frac{1}{2}$, $F = ...$

2°) Résous l'équation : $x + 5 = 0$. Complète alors : pour $x = -5$, $F = ...$

Règle

Pour qu'un **produit de facteurs soit nul**, il faut et il suffit que **l'un, au moins, de ses facteurs soit nul**.

Pour résoudre l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$, on résout donc les équations: $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$.

Par suite :

> $(ax + b)(cx + d) = 0$, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$
>
> admet pour solutions $x = -\dfrac{b}{a}$ et $x = -\dfrac{d}{c}$

EXEMPLE

Soit à résoudre l'équation : $(2x + 7)(-x + 4) = 0$.

Les solutions de cette équation sont celles de $2x + 7 = 0$ et $-x + 4 = 0$, soit $x = -\dfrac{7}{2}$ et $x = 4$.

Application 2

Résous chacune des équations suivantes : **1°)** $(2x - 5)(-x + 3) = 0$; **2°)** $x(3x + 5) = 0$.

3 RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS QUI SE RAMÈNENT À LA FORME : $(ax + b)(cx + d) = 0$

1°) $4x^2 - 7x = 0$.

On peut mettre ***x* en facteur** : $x(4x - 7) = 0$.

Les solutions sont donc $\boldsymbol{x = 0}$ **et** $\boldsymbol{x = \dfrac{7}{4}}$ **.**

2°) $(x - 5)(2x + 1) - (x - 5)(x + 4) = 0$.

On peut mettre **$(x - 5)$ en facteur** : $(x - 5)(2x + 1 - x - 4) = 0$,

$(x - 5)(x - 3) = 0$.

Les solutions sont donc $\boldsymbol{x = 5}$ **et** $\boldsymbol{x = 3}$**.**

3°) $x^2 = 9$.

Cette équation s'écrit : $x^2 - 9 = 0$,

$(x - 3)(x + 3) = 0$.

Les solutions sont donc $\boldsymbol{x = 3}$ **et** $\boldsymbol{x = -3}$**.**

4°) $(x+1)^2 = \frac{4}{9}$.

Cette équation s'écrit : $(x+1)^2 - \frac{4}{9} = 0$,

$$\left(x + 1 - \frac{2}{3}\right)\left(x + 1 + \frac{2}{3}\right) = 0 ,$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right) = 0.$$

Les solutions sont donc $\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}}$ **et** $\boldsymbol{x = -\frac{5}{3}}$ **.**

5°) $x^2 + 7 = 0$.
Cette équation s'écrit : $x^2 = -7$.
Elle n'a pas de solution car un carré ne peut pas être strictement négatif.

Application 3

Résous chacune des équations suivantes.

1°) $3x^2 - 8x = 0$.

2°) $\left(\frac{3}{5}x + 2\right)(3x - 1) - \left(\frac{3}{5}x + 2\right)(x - 4) = 0$.

3°) $x^2 = -5$.

4°) $(x+2)^2 = \frac{25}{16}$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Dis si le nombre proposé est une solution de l'équation donnée.

1°) $x^2 + 2x + 1 = 0$; -1.

2°) $(a - 5)(2a + 1) = 0$; 4.

3°) $\frac{y^2}{2} = 2$; -2.

4°) $(z+1)^2 + 4 = 0$; 3.

5°) $x^2 + 9 = 0$; -3.

2 Résous chacune des équations suivantes.

1°) $2x^2 + 3x = 0$.

2°) $\left(\frac{2t}{3} + 1\right)\left(\frac{4}{5} - t\right) = 0$.

3°) $r^2 - 5 = 0$.

4°) $u^2 - 4u + 4 = 0$.

5°) $(y+5)^2 = 4$.

6°) $9t^2 + 6t + 1 = 0$.

3 Résous chacune des équations suivantes.

1°) $2y^2 - 8 = 0$. **2°)** $5x^2 + 1 = 4x^2 + 10$. **3°)** $2(x^2 - 7) = 3(x^2 - 5)$. **4°)** $2(x^2 + 1) = x^2 - 3$.

5°) $3x^2 = 24$. **6°)** $4x^2 - 6 = 3x^2 + 10$. **7°)** $(x - 7)^2 + \frac{11}{3} = 0$. **8°)** $\frac{25}{49} = (x + 3)^2$.

4 Factorise puis résous chacune des équations suivantes.

1°) $(x-5)(3x-4)-(2x+8)(x-5)=0$. **2°)** $(x - 2)(5x - 6) - 3x(4x - 8) = 0$.

3°) $x^2 - 4 = (x + 2)(3x - 10)$. **4°)** $\left(\frac{3x}{7} + 5\right)^2 - \left(\frac{x}{14} - 3\right)^2 = 0$.

5°) $(7x + 12)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$. **6°)** $x^2 - 4x + 4 = (4x + 9)(x - 2)$.

5 Soit $A(x) = x^2 - 6x + 5$.

1°) **a)** Factorise l'expression $A(x) - 5$. **b)** Résous l'équation $A(x) = 5$.

2°) **a)** Développe et réduis l'expression $(x - 3)^2 - 4$.
b) Factorise $A(x)$. **c)** Résoudre alors $x^2 - 6x + 5 = 0$.

3°) Résous l'équation $A(x) = (x - 1)$.

Pour chercher

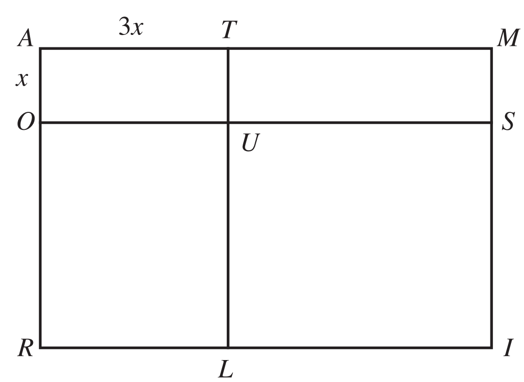
6 Trouve tous les nombres x : **1°)** égaux à leurs inverses. **2°)** égaux à leurs carrés.

7 Si on diminue le côté x d'un carré de 6 cm ($x > 6$), l'aire du nouveau carré sera égale à 25 cm^2 . Calcule x.

8 Un champ rectangulaire a comme dimensions : 49 m et 36 m. Calcule le côté c d'un carré de même aire que ce champ.

9 **1°)** Développe $S(x) = (x - 1)(x + 4)$.

2°) La figure ci-contre représente un rectangle $AMIR$ de longueur $AM = 6$ cm et de largeur $MI = 4$ cm.
Les segments $[TL]$ et $[OS]$ sont tels que : (TL) est parallèle à (MI) et (OS) est parallèle à (AM).
$AO = x$ et $AT = 3AO$.



a) La valeur x peut-elle être négative ?
b) Calcule, à l'aide de x, les aires des rectangles $OATU$ et $LUSI$.
c) Calcule x pour que l'aire du rectangle $LUSI$ soit le triple de celle de $OATU$.

TEST

1 Résous chacune des équations suivantes. **(6 points)**

1º) $(x-5)\left(3x+\frac{4}{3}\right)-\left(x+\frac{3}{2}\right)(5-x)=0.$

2º) $x^2-6x+9+(x-3)(x+4)=0.$

3º) $(2y-3)(y-2)-4y^2+12y-9=0.$

4º) $\left(\frac{3t}{5}-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)^2.$

5º) $6x^2+4=5x^2+9.$

6º) $2x^2+1=3x^2+5.$

2 Quelle est la longueur c du côté d'un carré ayant la même aire qu'un disque de 2m de rayon ? (on prendra $\pi = 3{,}14$). **(2 points)**

3 Trouve un nombre x dont le quadruple est égal à son carré; donne toutes les solutions. **(2 points)**

4 Soit $A(x) = 4x^2 + 8x - 5$. **(5 points)**

1º) **a)** Développe $(2x + 2)^2$.

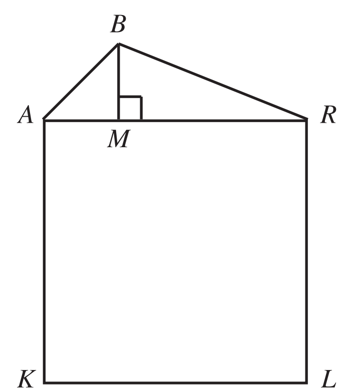
b) Calculer m pour que l'on ait $A(x)=(2x+2)^2-m$.

2º) Résous l'équation $A(x) = 0$.

3º) Résous l'équation $A(x)=(2x+5)$.

5 L'unité de longueur est le centimètre. **(5 points)**

KARL est un carré. $MR = 7$ cm , $AM = BM = x$.



1º) La valeur x peut-elle être négative ?

2º) Trouve, à l'aide de x, l'aire A_1 du triangle *BAR* et l'aire A_2 du carré *KARL*.

3º) Calcule x pour que $A_2 = 6A_1$.

13 INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

Objectifs

1. Utiliser la compatibilité de l'ordre avec les opérations sur les décimaux.
2. Résoudre des inéquations du premier degré à une inconnue.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Comparaison de deux nombres
2. Propriétés des inégalités
3. Inéquation du premier degré à une inconnue
4. Représentation des solutions d'une inéquation sur une droite numérique
5. Problèmes se ramenant à une inéquation du premier degré

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

Cours

1 COMPARAISON DE DEUX NOMBRES

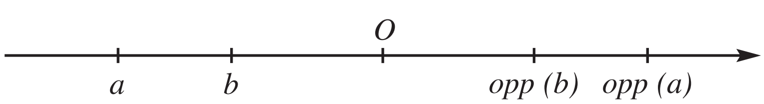
⊙ **Comparer** deux nombres a et b revient à dire si a est **plus petit** que b, ou si a est **égal** à b, ou si a est **plus grand** que b.

Comparaison	Lecture
$a < b$	a est inférieur à b ou a est plus petit que b
$a \leqslant b$	a est inférieur ou égal à b
$a > b$	a est supérieur à b ou a est plus grand que b
$a \geqslant b$	a est supérieur ou égal à b
$a < 0$	a est strictement négatif ou a est inférieur à 0
$a \leqslant 0$	«a est négatif» ou «a est inférieur ou égal à 0»
$a > 0$	a est strictement positif ou a est supérieur à 0
$a \geqslant 0$	«a est positif» ou «a est supérieur ou égal à 0»

Exemples

$-3{,}4 < 2{,}15$; $-5{,}12 < 0$; $4{,}7 > 0$.

⊙ **Deux nombres sont rangés dans l'ordre inverse de leurs opposés.**



Si $a < b$ alors opp $(a) >$ opp (b)

Si $a < b$ alors $-a > -b$

Exemples

$2 < 5$ alors $-2 > -5$; $-3 < 4$ alors $3 > -4$; $-9 < -5$ alors $9 > 5$.

Application 1

Compare : 4,13 et 4,103 ; – 32 et 5,3 ; – 15,4 et 0 ; 1,2 et 0 ; – 4,53 et – 2.

2 PROPRIÉTÉS DES INÉGALITÉS

Activité

Observe et complète le tableau suivant.

		Comparaison
$a = -2$	$b = 4$	$a < b$
$a + 3 = -2 + 3 = 1$	$b + 3 = 4 + 3 = 7$	$a + 3 < b + 3$
$a - 5 = \ldots$	$b - 5 = \ldots$	$a - 5 \ldots b - 5$
$3a = \ldots$	$3b = \ldots$	...
$-2a = \ldots$	$-2b = \ldots$	...
$\frac{a}{2} = \ldots$	$\frac{b}{2} = \ldots$	...
$\frac{a}{-4} = \ldots$	$\frac{b}{-4} = \ldots$	...

1°) L'ordre est conservé lorsqu'on ajoute ou on retranche un même nombre aux deux membres d'une inégalité.

Si $a \leqslant b$ alors pour tout nombre c, $a + c \leqslant b + c$; $a - c \leqslant b - c$

Exemples

$3 < 6$ alors $3 + 5 < 6 + 5$ $(8 < 11)$.

$2 < 5$ alors $2 - 3 < 5 - 3$ $(-1 < 2)$.

2°) L'ordre est conservé lorsqu'on multiplie ou on divise par un même nombre strictement positif les deux membres d'une inégalité.

Si $a \leqslant b$ alors pour tout nombre $c > 0$, $a \times c \leqslant b \times c$; $a \div c \leqslant b \div c$

Exemples

$2 < 4$ alors $2 \times 3 < 4 \times 3$ $(6 < 12)$.

$10 < 14$ alors $10 \div 2 < 14 \div 2$ $(5 < 7)$.

3°) L'ordre est inversé lorsqu'on multiplie ou on divise par un même nombre strictement négatif les deux membres d'une inégalité.

Si $a \leqslant b$ alors pour tout nombre $c < 0$, $a \times \boldsymbol{c} \geqslant b \times \boldsymbol{c}$; $a \div c \geqslant b \div c$

EXEMPLES

$4 < 6$ alors $4 \times \mathbf{(-2)} > 6 \times \mathbf{(-2)}$ $(-8 > -12)$.

$6 < 8$ alors $6 \div \mathbf{(-2)} > 8 \div \mathbf{(-2)}$ $(-3 > -4)$.

Application 2

Ecris l'inégalité obtenue :

1°) en ajoutant 3 aux deux membres de $-4 < 11$, de $-3 > -6$.

2°) en retranchant 7 aux deux membres de $19 > 16$, de $-7 < 5$.

3°) en multipliant par 2 les deux membres de $-3 < 4$, de $-8 < -3$.

4°) en multipliant par -3 les deux membres de $-4 < -1$, de $13 > 2$.

5°) en divisant par 3 les deux membres de $6 < 15$, de $12 > 9$.

6°) en divisant par -2 les deux membres de $-14 < 10$, de $18 > 16$.

3 INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

1°) Définition

Une **inéquation du premier degré en *x*** est une **inégalité** pouvant se mettre sous **l'une des formes** suivantes : $\boldsymbol{ax + b > 0}$; $\boldsymbol{ax + b \geqslant 0}$; $\boldsymbol{ax + b < 0}$; $\boldsymbol{ax + b \leqslant 0}$,

où $\boldsymbol{x}$ est une **inconnue**, a et b sont deux nombres donnés avec $\boldsymbol{a \neq 0}$.

EXEMPLES

$2x + 3 > 0$; $-5x + 2 \geqslant 0$; $\dfrac{3x}{2} + 5 < 0$ et $-7{,}3x + 10 \leqslant 0$ sont des inéquations.

Remarque

Soit l'inéquation : $ax + b \geqslant 0$.

On retranche b des deux membres : $ax + b \mathbf{-} \boldsymbol{b} \geqslant 0 \mathbf{-} \boldsymbol{b}$, $ax \geqslant -b$.

$ax + b \geqslant 0$ et $ax \geqslant -b$ sont deux inéquations équivalentes. Le terme $\boldsymbol{b}$ a été **transposé** du premier membre dans le deuxième et son **signe a changé.**

2°) Résolution

⊙ Une solution d'une inéquation en x est toute valeur de x qui la vérifie.

⊙ Résoudre une inéquation revient à trouver toutes ses solutions.

⊙ Deux inéquations équivalentes ont la même solution.

EXEMPLES

Soit à résoudre les inéquations suivantes.

1º) $2x - 3 \geqslant 0$.

– **on isole le terme en *x*** en transposant -3 : $2x \geqslant 3$.

– Pour avoir x, on **divise les deux membres par 2**.

2 étant positif, on obtient $x \geqslant \frac{3}{2}$.

$\frac{3}{2}$ et tous les nombres supérieurs à $\frac{3}{2}$ sont solutions de l'inéquation $2x - 3 \geqslant 0$.

2º) $-3x + 6 < 9$.

Cette inéquation s'écrit : $-3x < 9 \mathbf{- 6}$; soit : $-3x < 3$.

En divisant les deux membres par -3 (qui est négatif), on obtient : $x \mathbf{>} \frac{3}{-3}$; soit $x > -1$.

Tous les nombres supérieurs à -1 sont solutions de l'inéquation $-3x + 6 < 9$.

3º) Cas particuliers

⊙ Soit à résoudre l'inéquation : $3x + 1 > 3(x + 2)$.

Cette inéquation s'écrit : $3x + 1 > 3x + 6$,

$3x - 3x > 6 - 1$,

$0x > 5 \quad (0 > 5)$.

Ce résultat est impossible; il n'y a donc aucune valeur de x qui vérifie cette inéquation.

⊙ Soit à résoudre l'inéquation : $2x - 5 > 2x - 8$.

Elle s'écrit : $2x - 2x > -8 + 5$,

$0x > -3 \quad (0 > -3)$.

Ce résultat est toujours vérifié; toute valeur de x est donc solution de cette inéquation.

⊙ Soit à résoudre l'inéquation : $5x + 12 \leqslant 5(x + 3) - 3$.

Elle s'écrit : $5x + 12 \leqslant 5x + 12$,

$5x - 5x \leqslant 12 - 12$,

$0x \leqslant 0$.

Ce résultat est toujours vérifié; toute valeur de x est donc solution de cette inéquation.

⊙ Soit à résoudre l'inéquation : $7x + 8 > 7(x + 2) - 6$.

Elle s'écrit : $7x + 8 > 7x + 14 - 6$,

$7x - 7x > 8 - 8$,

$0x > 0$.

Ce résultat est impossible; il n'y a donc aucune valeur de x qui vérifie cette inéquation.

Application 3

Réponds par vrai ou faux.

1º) $0x < -4$ n'admet aucune solution.

2º) $0x > -3$ n'admet aucune solution.

3º) $0x < 7$ admet toute valeur de x comme solution.

4º) $0x < 0$ admet toute valeur de x comme solution.

5º) $0x \geqslant 0$ n'admet aucune solution.

4º) Tableau résumant la résolution d'une inéquation du premier degré en x

Inéquation	Inéquation équivalente	Solution	
		$a > 0$	$a < 0$
$ax + b \geqslant 0$	$ax \geqslant -b$	$x \geqslant \dfrac{-b}{a}$	$x \leqslant \dfrac{-b}{a}$
$ax + b > 0$	$ax > -b$	$x > \dfrac{-b}{a}$	$x < \dfrac{-b}{a}$
$ax + b \leqslant 0$	$ax \leqslant -b$	$x \leqslant \dfrac{-b}{a}$	$x \geqslant \dfrac{-b}{a}$
$ax + b < 0$	$ax < -b$	$x < \dfrac{-b}{a}$	$x > \dfrac{-b}{a}$

Application 4

Résous chacune des inéquations suivantes.

1º) $x + 4 \leqslant 5$.

2º) $-\dfrac{3}{2}x + 1 < x - \dfrac{3}{4}$.

3º) $x - 5 > 2\,(2x - 1)$.

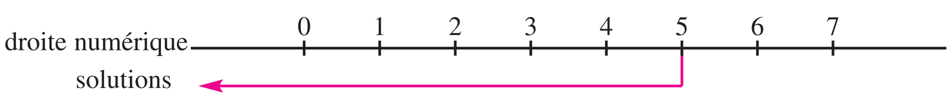
4º) $-5x + 3 \geqslant -7$.

5º) $x\sqrt{3} - 1 > 2$.

6º) $-3x - 4 < 3\,(+x - 2)$.

4 REPRÉSENTATION DES SOLUTIONS D'UNE INÉQUATION SUR UNE DROITE NUMÉRIQUE

⊙ Les solutions de l'inéquation $x \leqslant 5$ sont données par la représentation suivante :

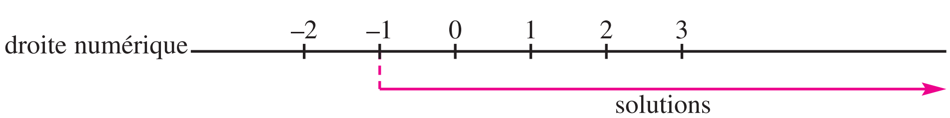


Pour montrer que 5 est aussi une solution, on dessine un trait plein en 5.

⊙ Soit à représenter sur une droite numérique les solutions de l'inéquation $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{4}{3} > \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}$.

Cette inéquation s'écrit $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{x}{2} > \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}$

$x > -1$.



Pour montrer que – 1 n'est pas solution, on dessine un trait pointillé en –1.

Application 5

Représente, sur une droite numérique, les solutions de chacune des inéquations suivantes.

1º) $4x - 3 \geqslant 2x + 1$. **2º)** $\frac{4}{9}x - 1 < \frac{x}{3} - \frac{10}{9}$.

5 PROBLÈME SE RAMENANT À UNE INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ

La résolution d'un problème est souvent facilitée par sa mise en inéquation, après un choix judicieux de l'inconnue.

Pour cela, on suivra les quatre étapes suivantes :

1º) choix de l'inconnue (après la lecture et l'analyse du texte).

2º) mise en inéquation.

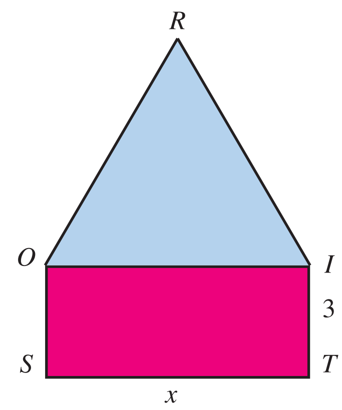
3º) résolution de l'inéquation.

4º) retour au problème posé.

EXEMPLE

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

La figure ci-contre représente un rectangle *SOIT* de largeur 3 et un triangle équilatéral *ROI*.



Soit à trouver les rectangles *SOIT* dont le périmètre est inférieur à celui du triangle *ROI*.

Le problème revient à déterminer la longueur de ce rectangle.

Si x est cette longueur, alors :
le périmètre de *SOIT* est $2\,(x + 3)$, et le périmètre de *ROI* est $3x$.

D'où l'inéquation :

$$\begin{aligned} &2\,(x + 3) < 3x \\ &2x + 6 < 3x \\ &2x - 3x < -6 \\ &-x < -6 \\ &x > 6. \end{aligned}$$

Tous les rectangles dont la longueur est supérieure à 6 cm répondent à la question.

Ces valeurs ($x > 6$) sont acceptables, comme étant supérieures à la largeur qui est 3 cm.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester les connaissances

1 Complète le tableau suivant en ajoutant ou en retranchant aux deux membres de l'inégalité le nombre donné.

Inégalité	Inégalité obtenue en ajoutant 3	Inégalité obtenue en retranchant 5
$a > 3$		
$b \leqslant -4$		
$c \geqslant 8$		

2 Complète le tableau suivant en multipliant ou en divisant les deux membres de l'inégalité par le nombre donné.

Inégalité	Inégalité obtenue en multipliant par 2	Inégalité obtenue en multipliant par – 3	Inégalité obtenue en divisant par 3	Inégalité obtenue en divisant par – 4
$x < -3$				
$y > 4$				
$z \leqslant -8$				

3 Représente, sur la droite numérique, les solutions de chacune des inéquations suivantes.

1°) $x \geqslant 2$. **2°)** $x < -1$. **3°)** $x \leqslant 3$. **4°)** $x > -4$.

4 Parmi les nombres : -6 ; -8 ; 0 ; 1 et 4, donne ceux qui sont solutions de l'inéquation en t : $\frac{t}{2} + 5 > 3$.

5 Relie les inéquations équivalentes.

$2x - 3 > 0$ •	• $x < \frac{-2}{\sqrt{3}}$
$\frac{-x}{3} + 5 < 3$ •	• $3x \leqslant -8$
$\frac{3x}{2} + 4 \leqslant 0$ •	• $x > \frac{3}{2}$
$-\sqrt{3}\,x > 2$ •	• $\frac{x}{3} > 2$

6 Donne la liste des entiers naturels vérifiant chacune des inéquations:

1°) $x - 1 \leqslant 4.$ **2°)** $\frac{-x}{2} + 1 > -3.$

7 Résous chacune des inéquations suivantes et représente les solutions sur la droite numérique.

1°) $4x > -12.$ **2°)** $2x + 1 < -3.$

3°) $x + 5 \geqslant 2x - 1.$ **4°)** $\frac{x}{2} + 5 > x - \frac{1-x}{3}.$

5°) $13 - 4(2 + x) - 8x \leqslant -9.$ **6°)** $2 - \frac{x-3}{4} \geqslant \frac{x}{2} - \frac{1-x}{3}.$

7°) $-\frac{1}{4}x - 1 > \frac{1}{3}.$ **8°)** $-2x - 5\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}.$

9°) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 \leqslant \frac{x^2}{4} + x - 3.$ **10°)** $\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(x-1)}{3} < 2 + \frac{x^2}{2}.$

8 Réponds par vrai ou faux.

1°) $\frac{13,1}{5} < \frac{13,01}{5}.$

2°) $\frac{10,3}{7} < \frac{10,3}{4}.$

3°) Il existe cinq entiers relatifs x tels que : $-2 \leqslant x < 2$.

4°) Un nombre strictement positif est toujours plus grand que son opposé.

5°) $-15,2 > -13,3$.

6°) $-\frac{1}{5} < -\frac{1}{7}.$

7°) Si $a \leqslant 10$ alors $a - 3 \leqslant 7.$

8°) Si $b > -4$ alors $-3b > 12.$

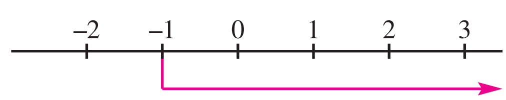
9°) $x = 0$ est une solution de l'inéquation $2x + 1 > 0.$

10°) $x = -1$ est une solution de l'inéquation $-x + 4 < 1.$

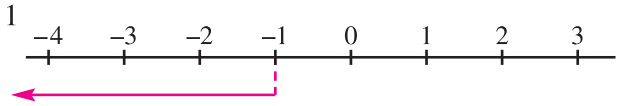
11°) Les deux inéquations $3x - 5 > 2$ et $3x > 7$ sont équivalentes.

12°) Les deux inéquations $-3x - 4 > 5$ et $-3x < 9$ ont les mêmes solutions.

13°) Les solutions de l'inéquation $3x + 6 \geqslant 0$ sont représentées graphiquement par:



14°) Les solutions de l'inéquation $-\frac{x}{3} < 1$ sont représentées graphiquement par :



Pour chercher

9 Trouve l'erreur dans l'enchaînement suivant.

$\pi > 3$

$3\,\pi > 9$

$3\,\pi - \pi^2 > 9 - \pi^2$

$(3 - \pi)\,\pi > (3 - \pi)\,(3 + \pi)$

$\pi > 3 + \pi$

$0 > 3.$

10 Un décimal d est tel que $d \leqslant -1{,}7$. Compare :

1°) $d + 31$ et $30{,}4$.

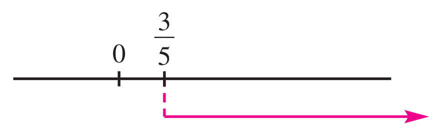
2°) $-3d$ et 5.

11 Ecris, dans chacune des cases, V (vrai) ou F (faux), suivant que le nombre donné est une solution ou non de l'inéquation proposée.

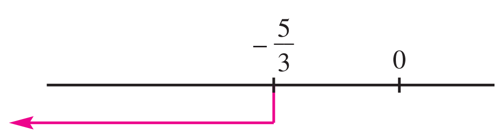
Nombre / **Inéquation**	-5	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$3x + 1 < 0$						
$2x - 5 \geqslant 0$						
$5x + 1 > x - 3$						
$4 - x \leqslant 3 + 2x$						

12 Relie chaque inéquation à la représentation graphique de sa solution.

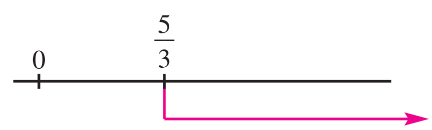
$3x - 1 \geqslant 4$



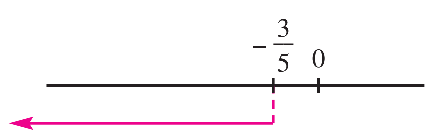
$3x + 1 < -2x - 2$



$12x - 5 > 2x + 1$



$\frac{x}{2} + \frac{5}{6} \leqslant 0$



13 Résous chacune des inéquations suivantes et représente ses solutions sur la droite numérique.

1°) $3x - 7 - (x + 12) < 3$.

2°) $\frac{x}{5} - \frac{7}{3} + \frac{2x}{15} \geqslant 1$.

3°) $-5 + 3\left(\frac{x}{4} + 1\right) < \frac{3x}{2} + 1$.

4°) $\frac{8x+3}{12} > 1 - \frac{4x-1}{6}$.

5°) $\sqrt{2} - x\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$.

6°) $\sqrt{2}\,(x + 3) \geqslant 3\sqrt{2}$.

7°) $5x + \sqrt{2} > 2\,(x + 1) + 3x$.

8°) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right) \geqslant x\left(\frac{x}{4} - 3\right)$.

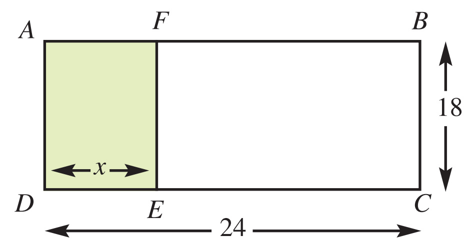
14 **1°)** Quels sont les entiers naturels dont le double est inférieur à 5 ?
2°) Quels sont les nombres dont le triple est supérieur à 4 ?
3°) Quels sont les nombres dont le tiers est inférieur ou égal à – 3 ?

15 Le triple d'un nombre entier naturel est inférieur à sa moitié augmentée de 8.
1°) En appelant n cet entier, traduis la donnée par une inéquation.
2°) Résous cette inéquation.
3°) Quelles sont les valeurs possibles de n ?

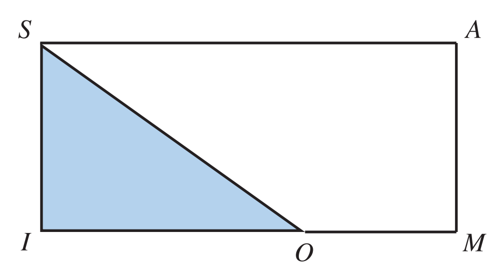
16 **1°)** Si x est un entier naturel, quel est l'entier qui le précède ? qui le suit ?
2°) Traduis en une inéquation chacun des énoncés suivants:
⊙ la somme de trois entiers consécutifs est inférieure à 9.
⊙ la somme de trois entiers consécutifs est supérieure à 3.
3°) Résous chacune de ces inéquations.
4°) Trouve alors l'entier naturel qui vérifie les deux inéquations précédentes.

17 Marc a eu 11 et 10 sur 20 aux deux premiers devoirs de mathématiques. Quelles notes doit-il avoir au troisième pour que la moyenne de ces trois notes soit égale au moins à 12 ?

18 L'unité de longueur est le centimètre.
En observant la figure ci-dessous, trouve les valeurs de x pour lesquelles l'aire de $AFED$ est inférieure ou égale à la moitié de l'aire de $ABCD$.



19 $SAMI$ est un rectangle tel que $SA = 24$ cm et $SI = 10$ cm. O est un point du côté $[IM]$ tel que $IO = x$ cm.



1°) Comment varie x ?
2°) Détermine les positions de O pour lesquelles l'aire du triangle SOI est supérieure au tiers de l'aire du rectangle $SAMI$.

20 Une bibliothèque propose à ses lecteurs, pour l'emprunt d'un livre, le choix entre 2 tarifs annuels.
Tarif 1 : abonnement annuel 450 000 L.L. puis 5 000 L.L. par livre.
Tarif 2 : 15 000 L.L. par livre sans abonnement.
A partir de quel nombre de livres, le tarif 1 est-il plus avantageux ?

TEST

1 Un décimal n est tel que $n < -2{,}1$.

Compare : **(5 points)**

1°) $-5n$ et 10.

2°) $n - 4$ et -6.

2 Résous chacune des inéquations suivantes et représente ses solutions sur la droite numérique.

1°) $\frac{3}{4}x + \frac{11}{2} > \frac{7x}{2} - \frac{5}{4}$. **(2 points)**

2°) $2x - 3(x+1)^2 \leqslant -2x^2 - 1 - (-x+3)^2$. **(2 points)**

3°) $\frac{-2x+2}{8} < 1 - \frac{5-x}{12}$. **(2 points)**

4°) $\sqrt{5}\,x + 10 \geqslant 2x + 5\sqrt{5}$. **(2 points)**

3 L'unité de longueur est le centimètre.

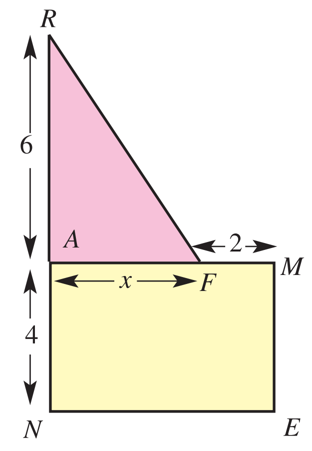
1°) Exprime, à l'aide de x :

a) l'aire du triangle RAF. **(2 points)**

b) l'aire du rectangle $AMEN$. **(2 points)**

2°) Pour quelles valeurs de x, l'aire du triangle RAF est-elle inférieure à la moitié de l'aire du rectangle $AMEN$?

(3 points)



14 THÉORÈME DE PYTHAGORE

Objectif

Connaître et utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque.

PLAN DU CHAPITRE

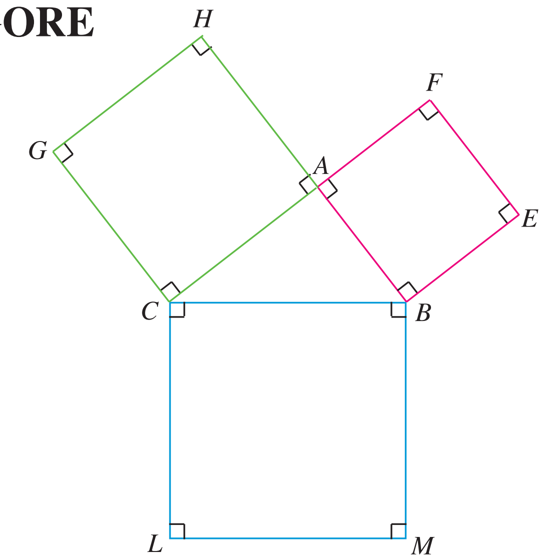
COURS

1. Théorème de Pythagore
2. Réciproque du théorème de Pythagore
3. Hauteur d'un triangle équilatéral
4. Hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 THÉORÈME DE PYTHAGORE



Activité

L'unité de longueur est le centimètre .

ABC est un triangle rectangle en *A* tel que

$AB = 3$,

$AC = 4$ et

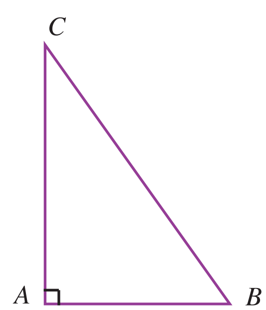
$BC = 5$.

Montrer que :

Aire du carré *ABEF* + Aire du carré *ACGH* = Aire du carré *BCLM* .

En déduire que $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Enoncé du théorème de Pythagore

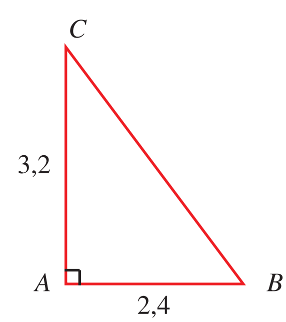


Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Le triangle *ABC* ci-contre est rectangle en *A*.

Alors : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

EXEMPLE



On peut appliquer, à ce triangle, le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = (2{,}4)^2 + (3{,}2)^2$

$BC^2 = 16.$

D'où $BC = 4$ cm.

Application 1

[*BC*] est un diamètre d'un cercle de centre *O* et de rayon 5 cm.

1º) Place sur ce cercle un point *A* tel que $BA = 8$ cm.

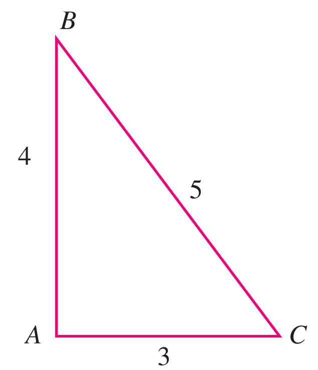
2º) Démontre que le triangle *ABC* est rectangle.

3º) Calcule *CA*.

2 RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Si les côtés d'un triangle *ABC* vérifient la relation :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle *ABC* est rectangle en *A*.



Dans le triangle *ABC* ci-contre,
$AC = 3$, $AB = 4$ et $BC = 5$.

D'une part : $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.

D'autre part : $BC^2 = 5^2 = 25$.

Comme : $4^2 + 3^2 = 5^2$, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Le triangle *ABC* est donc rectangle en *A*.

Attention !

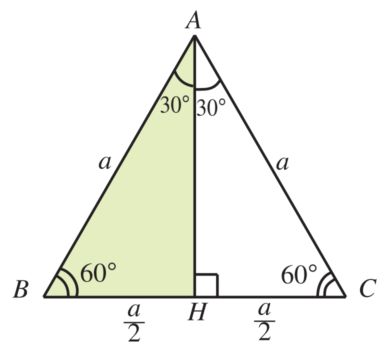
Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus long côté.

Application 2

3,65 cm ; 0,27 cm et 3,64 cm sont les longueurs des côtés d'un triangle.

Montre que ce triangle est rectangle (utilise la calculatrice).

3 HAUTEUR D'UN TRIANGLE ÉQUILATÉRAL



Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et $[AH]$ le segment-hauteur relatif à $[BC]$.

Le triangle ABC, étant équilatéral, la hauteur $[AH]$ est en même temps médiane; H est donc le milieu de $[BC]$. D'où : $BH = HC = \frac{a}{2}$.

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle ABH rectangle en H :

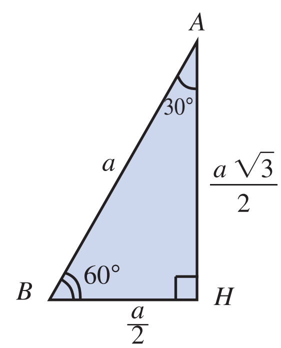
$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$AH^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

$$AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} .$$

D'où : $\boxed{AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

Remarque



Un triangle demi-équilatéral est un triangle qui a un angle de 30° , un angle de 60° et un angle de 90° .

Dans un triangle demi-équilatéral :

⊙ le côté opposé à 30° vaut la moitié de l'hypoténuse $\left(BH = \frac{BA}{2}\right)$.

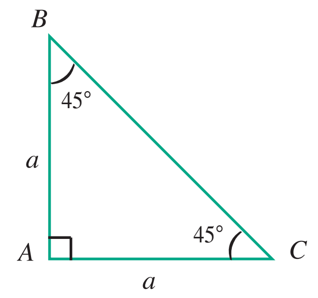
⊙ le côté opposé à 60° vaut l'hypoténuse $\times \frac{\sqrt{3}}{2} \left(AH = \frac{BA\sqrt{3}}{2}\right)$.

Application 3

ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm, H le pied de la hauteur relative à $[BC]$. Calcule AH.

4 HYPOTÉNUSE D'UN TRIANGLE RECTANGLE ISOCÈLE

Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sommet principal A tel que $AB = AC = a$.



Appliquons le théorème de Pythagore au triangle ABC qui est rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

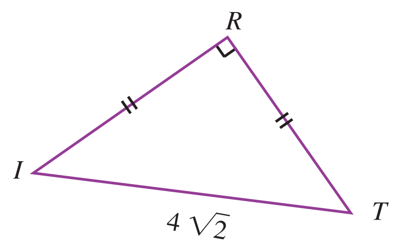
$$BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

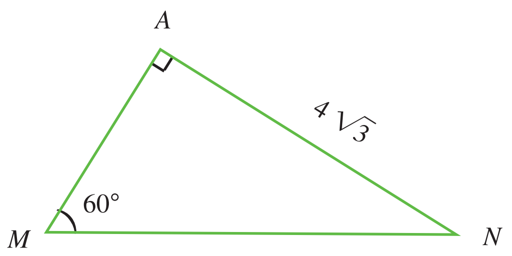
D'où : $\boxed{BC = a\sqrt{2}}$

Application 4

1°) $ABCD$ est un carré de côté 5 cm. Calcule la longueur de sa diagonale.

2°) Trouve les mesures des angles et des côtés des deux triangles RIT et MAN.





EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester les connaissances

1 *BEL* est un triangle rectangle en *E*. *M* est le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse.

Applique le théorème de Pythagore à chacun des triangles : *BEL*, *LEM* et *BEM*.

2 *ABCD* est un rectangle.

Démontre que : $AB^2 + AD^2 = AC^2$.

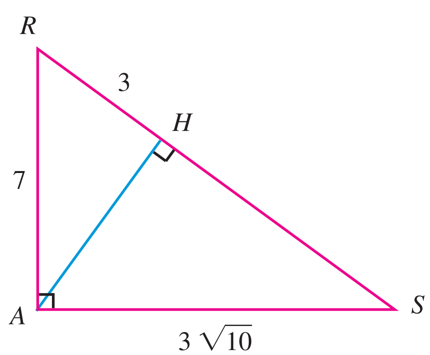
3 Calcule les diagonales d'un rectangle *JOLI* de dimensions 13 et 8; donne le résultat à un centième près par défaut (utilise la calculatrice).

4 Soit *RAS* un triangle rectangle en *A* tel que :

$RA = 7$, $AS = 3\sqrt{10}$ et $HR = 3$.

1º) Calcule la hauteur *AH*.

2º) Calcule *HS*.



5 Les diagonales d'un losange mesurent 8 cm et 6 cm.

Quelle est la longueur du côté de ce losange ?

6 **1º)** Montre qu'un triangle dont les côtés mesurent 10 ; 8 et 6 , est un triangle rectangle.

2º) Si tu doubles les côtés, obtiens-tu un triangle rectangle ?

7 Un triangle dont les côtés mesurent 2,1 ; 3 et 5,2 , est-il un triangle rectangle ? (Utilise la calculatrice).

Si tu doubles les côtés, obtiens-tu un triangle rectangle ?

8 **1º)** Un triangle dont les mesures des côtés sont 5,1 ; 6,8 et 8,5 , est-il rectangle ? (Utilise la calculatrice).

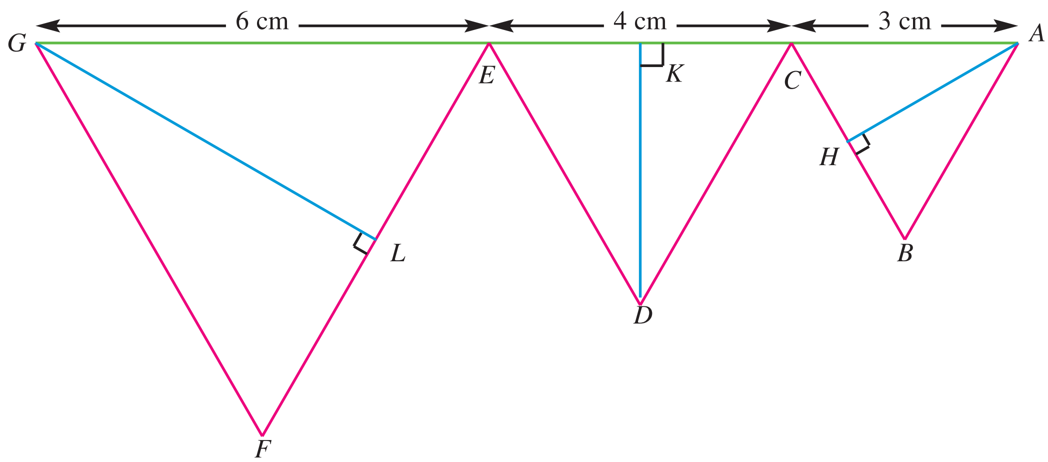
2º) Si tu doubles les côtés, cela changerait-il la réponse ?

9 Soit *MAN* et *YES* deux triangles rectangles en *A* et *E* respectivement.

On donne : $MA = \sqrt{7}$; $AN = 3$;
$YE = \sqrt{7} - 1$ et $ES = \sqrt{7} + 1$.

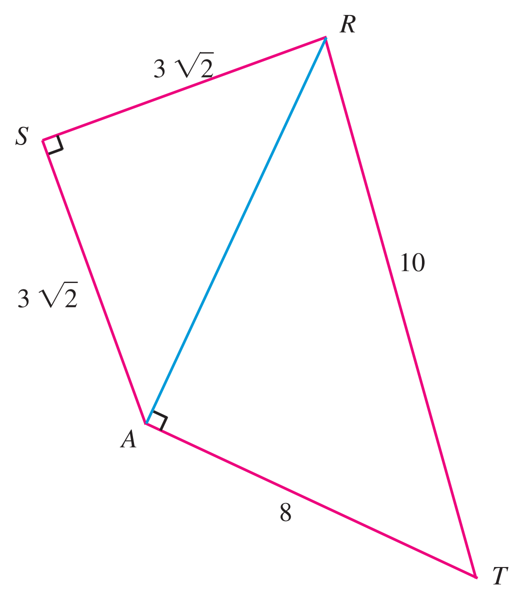
Montre que $MN = YS$.

10 Calcule les hauteurs AH, DK et GL des triangles équilatéraux suivants :



11 Dans la figure ci-contre, calcule AR.

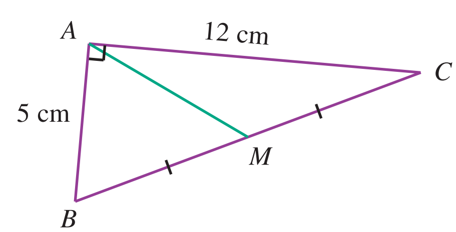
Déduis alors que le triangle RAT est rectangle.



12 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm.

Calcule AC, si l'aire de ce triangle est égale à 16,2 cm^2 .

13 Combien mesure le segment-médiane [AM] du triangle rectangle ci-contre ?



14 Réponds par vrai ou faux.

1°) Le triangle de côtés 3 ; 4 et 5 est rectangle.

2°) Dans le triangle EFG, on a : $EF^2 = EG^2 + GF^2$; ce triangle est donc rectangle en F.

3°) Lorsque $AB = 6$, le point M qui vérifie : $MA^2 + MB^2 = 36$, est le sommet du triangle rectangle d'hypoténuse [AB].

4°) ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet principal A tel que $AB = AC = 5$. Son hypoténuse [BC] mesure alors $5\sqrt{2}$.

5°) Dans un triangle équilatéral de côté 5, la hauteur mesure $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Pour chercher

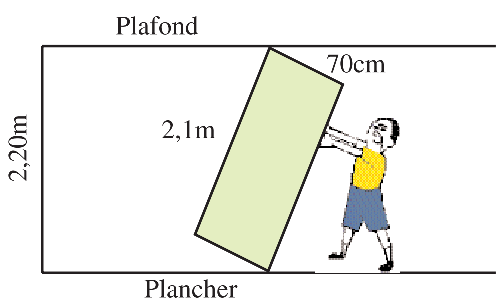
15 $ABCD$ est un trapèze rectangle en A et B tel que : $AD = 7$ cm,

$BC = 4$ cm et $AC = 5{,}5$ cm.

Calcule le périmètre de ce trapèze.

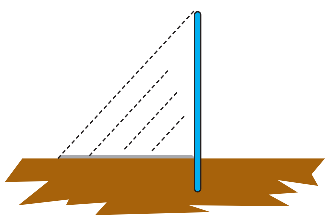
16 Les dimensions de l'armoire sont : hauteur 2,10 m; profondeur 70 cm.

Peut-on dresser cette armoire ?

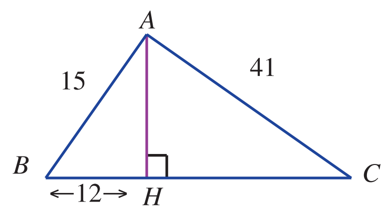


17 Un bâton de 1,40 m de longueur, enfoncé dans le sol à une profondeur de 0,15 m, fait une ombre de 0,90 m.

Quelle est la distance de l'extrémité supérieure du bâton à l'extrémité de l'ombre ? (Résultat à 0,01 près par défaut).

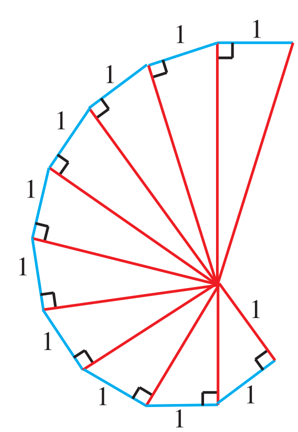


18 En utilisant les données indiquées sur la figure ci-dessous, calcule l'aire du triangle ABC.



19 Chaque segment bleu mesure 1 cm.

Calcule la longueur de chaque segment rouge.

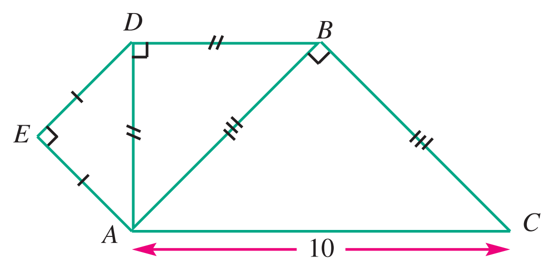


20 Les triangles ABC, ABD et AED sont rectangles isocèles avec $AC = 10$.

1°) Calcule AB, AD et AE.

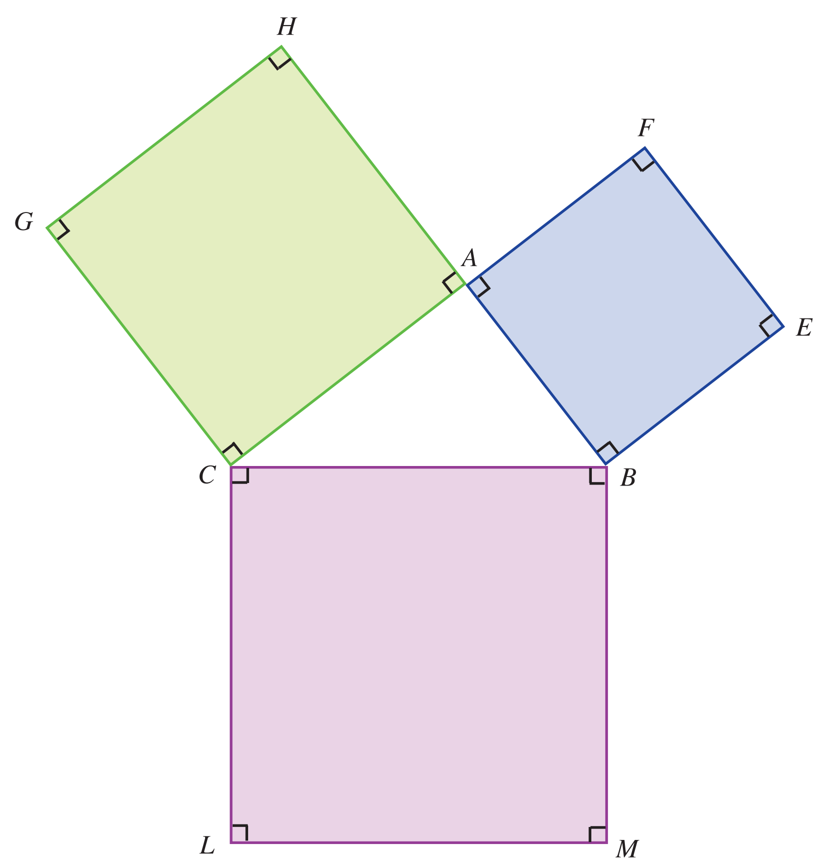
2°) Construis un triangle AFE rectangle isocèle de sommet principal F. Calcule AF.

Les points F, A et C sont-ils alignés ? Justifie.



21 $ABEF$, $ACGH$ et $BCLM$ sont trois carrés d'aires respectives 9 cm^2, 16 cm^2 et 25 cm^2.

Démontre que le triangle ABC est rectangle.



22 Un téléviseur «écran 90» est un poste dont l'écran a une diagonale de 90 cm.

Quelle est la mesure du côté d'un téléviseur «écran 90» de forme carrée ? (Utilise la calculatrice).

TEST

1 *PAS* est un triangle rectangle en *P* tel que $PS = 12$ et $SA = 13$.

Calcule *PA*. **(3 points)**

2 *ARC* est un triangle rectangle en *A* tel que $CR = 10$ et $AC = 6$.

Calcule les longueurs des trois médianes de ce triangle. **(6 points)**

3 *ABC* est un triangle rectangle isocèle de sommet principal *B* tel que $BA = a$. *ACD* est un triangle rectangle en *C* avec $\widehat{CAD} = 30°$ et *D* est à l'extérieur du triangle *ABC*.

Calcule *CD* et *AD*. **(6 points)**

4 *ABCD* est un carré de côté 12 cm. *P* est le milieu de [*CD*] et *N* le point de [*BC*] tel que $CN = 3$ cm.

Démontre que le triangle *ANP* est rectangle. **(5 points)**

15 EXPRESSIONS FRACTIONNAIRES

Objectif

Effectuer des calculs sur des expressions littérales données sous forme fractionnaire.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Expression fractionnaire littérale
2. Simplification d’une expression fractionnaire littérale
3. Réduction au même dénominateur
4. Addition et soustraction des expressions fractionnaires
5. Multiplication des expressions fractionnaires
6. Division des expressions fractionnaires

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 EXPRESSION FRACTIONNAIRE LITTÉRALE

Activité

1°) Calcule la valeur numérique de l'expression $A = \frac{x+4}{x-2}$ pour $x = -4$; $x = 5$.

2°) Peux-tu trouver la valeur numérique de A pour $x = 2$?

3°) Quelle est la valeur de x qui annule le dénominateur de l'expression $B = \frac{x-3}{x+4}$? Peux-tu calculer une valeur numérique de B pour $x = -4$?

Exemples d'expressions fractionnaires littérales

⊙ $\mathbf{\frac{4y+5}{y+7}}$, $\mathbf{\frac{3x+1}{x}}$ et $\mathbf{\frac{2}{3t-1}}$ sont trois **expressions fractionnaires littérales**, où x , y et t sont des variables.

⊙ Une **expression fractionnaire littérale existe,** ou **est définie** ou **a un sens** lorsque son **dénominateur est non nul.**

EXEMPLES

⊙ L'expression fractionnaire littérale $\frac{x-4}{2x+1}$ est définie pour :

$2x + 1 \neq 0$, soit $x \neq -\frac{1}{2}$.

⊙ Le dénominateur de l'expression fractionnaire littérale $\frac{m+2}{m^2-9}$ s'annule pour : $m^2 - 9 = 0$; $(m - 3)(m + 3) = 0$, soit $m = 3$ ou $m = -3$.

Pour ces valeurs de la variable m, l'expression fractionnaire donnée n'est pas définie.

Cette expression a donc un sens pour $m \neq 3$ et $m \neq -3$.

Application 1

Détermine les valeurs de la variable, pour que chacune des expressions fractionnaires littérales suivantes soit définie .

1°) $E = \frac{x+3}{-x+2}$. **2°)** $F = \frac{2y-1}{3y-18}$. **3°)** $G = \frac{m-7}{m^2-16}$.

2 SIMPLIFICATION D'UNE EXPRESSION FRACTIONNAIRE LITTÉRALE

Pour **simplifier** une expression fractionnaire littérale :

Soit à simplifier :

$$E = \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 1}.$$

- tu **détermines les valeurs des variables** pour lesquelles **l'expression a un sens.**

E a un sens pour $m^2 - 1 \neq 0$; $(m-1)(m+1) \neq 0$; soit $m \neq 1$ et $m \neq -1$.

- tu **décomposes**, s'il y a lieu, **ses termes** (numérateur et dénominateur) en un **produit de facteurs.**

E s'écrit alors :

$$E = \frac{(m-1)^2}{(m-1)(m+1)}.$$

- tu **supprimes les facteurs communs** aux deux termes, ce qui revient à diviser les deux termes par ces facteurs.

En simplifiant par $(m-1)$, tu obtiens : $E = \dfrac{m-1}{m+1}$.

Application 2

Simplifie chacune des expressions fractionnaires littérales suivantes.

1°) $E = \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)^2}$. **2°)** $F = \dfrac{25\,a^6\,b^2\,c^4}{10\,a^4\,b\,c^5}$.

Remarque

Un **changement de signe pourrait faciliter**, dans certains cas, la **simplification** de l'expression fractionnaire.

EXEMPLE

Soit à simplifier l'expression : $\dfrac{m^2 - 4}{2 - m}$.

Cette expression existe pour $2 - m \neq 0$, soit $m \neq 2$.

Tu peux alors écrire : $\dfrac{m^2-4}{2-m} = -\dfrac{m^2-4}{m-2} = -\dfrac{(m-2)(m+2)}{m-2} = -(m+2)$.

3 RÉDUCTION AU MÊME DÉNOMINATEUR

Pour **réduire au même dénominateur** plusieurs expressions fractionnaires :

Soit les expressions :

$$\frac{2x^2 + xy}{x^2} \quad ; \quad \frac{z^2 - 2xz}{yz} \quad ; \quad \frac{x + 2y}{z} .$$

⊙ tu **simplifies** ces expressions, s'il y a lieu, après avoir posé les conditions d'existence.

Pour $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$, tu obtiens en simplifiant :

$$\frac{2x + y}{x} \quad ; \quad \frac{z - 2x}{y} \quad ; \quad \frac{x + 2y}{z} .$$

⊙ tu **choisis** le **dénominateur commun** le **plus simple**.

Le dénominateur commun est $x\,y\,z$.

⊙ tu **complètes** la **réduction** au **même dénominateur.**

Tu obtiens :

$$\frac{yz(2x+y)}{xyz} \; ; \; \frac{xz(z-2x)}{xyz} \; ; \; \frac{xy(x+2y)}{xyz}$$

Application 3

Les expressions fractionnaires : $\frac{2\,(a-1)}{a+2}$ et $\frac{3\,(a+2)}{4\,(a-4)}$ sont définies, respectivement, pour $a + 2 \neq 0$ et $a - 4 \neq 0$; soit $a \neq -2$ et $a \neq 4$. Elles admettent $4\,(a + 2)\,(a - 4)$ comme dénominateur commun.

Réduis alors au même dénominateur ces deux expressions.

4 ADDITION ET SOUSTRACTION DES EXPRESSIONS FRACTIONNAIRES

Pour **additionner** ou **soustraire des expressions fractionnaires** :

Soit à simplifier :

$$E = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1} + \frac{2m}{m^2-1}.$$

⊙ tu **simplifies** ces expressions après avoir posé les conditions d'existence; puis tu les **réduis au même dénominateur.**

Pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$, on a :

$$E = \frac{m-1}{(m-1)(m+1)} - \frac{m+1}{(m-1)(m+1)} + \frac{2m}{(m-1)(m+1)}$$

⊙ tu **additionnes** ou tu **soustrais les numérateurs obtenus.**

$$E = \frac{m-1-(m+1)+2m}{(m-1)(m+1)}$$

$$= \frac{m-1-m-1+2m}{(m-1)(m+1)}$$

$$E = \frac{2m-2}{(m-1)(m+1)}.$$

⊙ tu **simplifies**, si c'est possible, **le résultat obtenu.**

$$E = \frac{2(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{2}{m+1}.$$

Application 4

Effectue.

1°) $F = \frac{2a}{b} - \frac{4}{3a} + \frac{b}{3}.$

2°) $G = \frac{a-2}{a+2} + \frac{a+2}{a-2} - \frac{a^2+4}{a^2-4}.$

5 MULTIPLICATION DES EXPRESSIONS FRACTIONNAIRES

Pour **multiplier des expressions fractionnaires** :	Soit à effectuer $P = \dfrac{a^2 - 9}{8a} \times \dfrac{6a}{a + 3}$.
⊙ tu **simplifies ces expressions**, s'il y a lieu, après avoir posé les conditions d'existence.	Conditions d'existence : $a \neq 0$ et $a \neq -3$.
⊙ tu **indiques la multiplication** des numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.	$P = \dfrac{(a^2 - 9) \times 6a}{8a \times (a + 3)}$.
⊙ s'il y a lieu, - tu **décomposes en facteurs les deux termes** de l'expression ainsi formée, - tu **simplifies**.	$P = \dfrac{(a - 3)\,(a + 3) \times 2 \times 3a}{2 \times 4a\,(a + 3)}$ $P = \dfrac{3\,(a - 3)}{4}$.

Application 5

Effectue les multiplications suivantes.

1°) $\dfrac{2x}{x - 4} \times \dfrac{x^2 - 16}{8}$. **2°)** $\dfrac{1 + 4x}{1 - 4x} \times \dfrac{(1 - 4x)^2}{(1 + 4x)^2}$. **3°)** $\dfrac{a + 2}{a + 3} \times \dfrac{a^2 - 9}{a^2 - 4}$.

6 DIVISION DES EXPRESSIONS FRACTIONNAIRES

Pour diviser une expression fractionnaire par une deuxième, tu multiplies la première par l'inverse de la deuxième.

EXEMPLE

Soit à effectuer le quotient $Q = \dfrac{x^2 - 4}{3x} : \dfrac{x - 2}{6x}$.

Q s'écrit : $Q = \dfrac{x^2 - 4}{3x} \times \dfrac{6x}{x - 2}$. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 2$, on a :

$$Q = \frac{(x-2)(x+2)}{3x} \times \frac{6x}{x-2}$$

$$Q = 2(x+2).$$

Remarque

Lorsque, dans un calcul sur les expressions fractionnaires, interviennent des nombres entiers ou des expressions algébriques non fractionnaires, tu peux toujours les supposer de dénominateur 1 et leur appliquer les règles déjà établies.

EXEMPLE

Soit à effectuer $E = 3m^2 + 1 - \dfrac{3m^2 n^2 + 1}{n^2}$.

$$E = \frac{3m^2 + 1}{1} - \frac{3m^2 n^2 + 1}{n^2}.$$

Pour $n \neq 0$, $\quad E = \dfrac{(3m^2 + 1)n^2 - (3m^2 n^2 + 1)}{n^2} = \dfrac{3m^2 n^2 + n^2 - 3m^2 n^2 - 1}{n^2}$

$$E = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Réponds par vrai ou faux.

1°) L'expression fractionnaire $\dfrac{4+x}{5+x}$ est définie pour $x \neq -5$.

2°) L'expression $\dfrac{x-2}{x+3}$ est définie pour $x \neq 2$.

3°) L'expression $\dfrac{2x+1}{x-4}$ a un sens pour tout nombre.

4°) L'expression $\dfrac{5}{2+x^2}$ est définie pour tout nombre x.

5°) Si x est différent de 2 alors $\dfrac{3\,(x-2)}{5\,(x-2)} = \dfrac{3}{5}$.

6°) L'inverse de $2a - b$ est $-2a + b$.

7°) L'inverse de $m^2 - 1$ est $\dfrac{1}{m^2-1}$.

2 Simplifie chacune des expressions fractionnaires suivantes :

1°) $\dfrac{x+x^2}{1+x}$. **2°)** $\dfrac{2x^2+4x}{3x+6}$. **3°)** $\dfrac{x^3+3x^2}{x^2-9}$.

4°) $\dfrac{2ax-10x}{a^2-25}$. **5°)** $\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-4}$. **6°)** $\dfrac{4a^2-12a+9}{4a^2-9}$.

3 Effectue les opérations suivantes.

1°) $\dfrac{m}{m+1} + \dfrac{n}{m+1}$. **2°)** $\dfrac{x^2}{x+3} - \dfrac{9}{x+3}$. **3°)** $\dfrac{m-1}{m} - \dfrac{m+1}{m-1}$. **4°)** $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x-2}$.

4 Effectue les multiplications.

1°) $\dfrac{4x}{5y} \times \dfrac{25y}{8x}$. **2°)** $\dfrac{5x^2y}{3y} \times \left(\dfrac{-3y^2}{5x^2}\right)$.

3°) $\left(\dfrac{-4a^2b}{9}\right) \times \left(\dfrac{-3c}{4b^2}\right)$. **4°)** $\left(\dfrac{-3a^2}{2a}\right) \times \left(\dfrac{-2b^2}{3}\right) \times \left(\dfrac{-4}{5b}\right)$.

5 Rends au même dénominateur et effectue.

1°) $1 - \dfrac{x-3}{x+3}$. **2°)** $a - 2 + \dfrac{4}{a+2}$. **3°)** $\dfrac{1}{m-1} - \dfrac{1}{m+1} + 1$.

4°) $\dfrac{x}{x-5} + \dfrac{5}{5-x}$. **5°)** $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{2}{a^2-1}$. **6°)** $\dfrac{30x}{9x^2-1} + \dfrac{4}{3x-1} - \dfrac{5}{3x+1}$.

6 Effectue les divisions.

1°) $\dfrac{x}{y} \div \dfrac{y}{x}$. **2°)** $\dfrac{6x}{y} \div \dfrac{x}{3}$. **3°)** $5ax \div \dfrac{10x}{b}$.

4°) $\dfrac{8-2x^2}{3x} \div (2+x)$. **5°)** $(a^2-9) \div \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{3}\right)$. **6°)** $\left(\dfrac{1}{a^2} - 1\right) \div \left(\dfrac{1}{a} + 1\right)$.

Pour chercher

7 On donne les deux expressions.

$A(x) = 4\,(3x-1)^2 - 25\,(-3x+2)^2$ et

$B(x) = (7x-4)^2 - 2(4-7x)(4x-3) + 49x^2 - 16$.

1°) Factorise $A(x)$ et $(B(x)$.

2°) Soit l'expression fractionnaire $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$.

a) Pour quelles valeurs de x , $F(x)$ existe-t-elle ?

b) Simplifie alors $F(x)$.

c) Résous $F(x) = -1$.

3°) Soit $G(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$.

a) Pour quelles valeurs de x , $G(x)$ existe-t-elle ?

b) Simplifie alors $G(x)$.

8 On donne l'expression $A(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{x-1}$.

1°) Pour quelles valeurs de x , $A(x)$ existe-t-elle ?

2°) Ecris $A(x)$ sous forme d'une expression fractionnaire.

3°) Résous l'équation $A(x) = 0$.

4°) Calcule $A\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

9 On donne les deux expressions.

$P(x) = 9\,(2x-1)^2 - 4$ et $Q(x) = (6x-5)\,(x-2) - 12x + 10$.

1°) Factorise $P(x)$ et $Q(x)$.

2°) Résous l'équation $P(x) = Q(x)$.

3°) Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

a) Pour quelles valeurs de x , l'expression $F(x)$ existe-t-elle ?

b) Simplifie alors $F(x)$. **c)** Résous l'équation $F(x) = -2$.

10 On donne l'expression $A(x) = \dfrac{x-1}{2x-3} - \dfrac{x-2}{2x+1}$.

1°) Pour quelles valeurs de x , $A(x)$ est-elle définie ?

2°) Ecris $A(x)$ sous forme d'une expression fractionnaire.

3°) Calcule $A\,(0)$; $A\,(-1)$ et $A\,(0{,}5)$.

11 On donne les deux expressions.

$A(x) = (x-2)\,(x+5) - 2x + 4$ et $B(x) = (2x-3)^2 - (x-1)^2$.

1°) Factorise $A(x)$ et $B(x)$.

2°) Résous $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$.

3°) Soit $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$.

a) Pour quelles valeurs de x , $F(x)$ est-elle définie ? **b)** Simplifie $F(x)$.

c) Calcule $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$. **d)** Résous l'équation $F(x) = -2$.

12 Soit l'expression

$A(x) = -x - 4 - \dfrac{1}{x+2}$.

1°) Pour quelle valeur de x , $A(x)$ est-elle définie ?

2°) Calcule $A\,(0)$; $A\,(-1)$ et $A\,(-3)$.

3°) Résous l'équation $A(x) = \dfrac{x+2}{4}$.

TEST

1 Simplifie chacune des expressions fractionnaires littérales suivantes. **(4 points)**

1º) $\dfrac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}$. **2º)** $\dfrac{9a^2 - 12a + 4}{9a^2 - 4}$.

2 Effectue les opérations suivantes. **(4 points)**

1º) $\dfrac{x^2}{x - 3} - \dfrac{9}{x - 3}$.

2º) $\dfrac{1}{m - 1} - \dfrac{1}{m + 1} - \dfrac{2m^2}{m^2 - 1}$.

3 Effectue les opérations suivantes. **(4 points)**

1º) $\dfrac{a + 1}{a - 1} \times \dfrac{2a^2 - 4a + 2}{a^2 + 2a + 1}$.

2º) $\dfrac{a^2 - 4}{a^2 + 4a} \div \dfrac{a^2 - 2a}{a + 4}$.

4 Soit les deux expressions. **(8 points)**

$A(x) = (x^2 - 49) + (3x + 1)(x + 7)$ et

$B(x) = (x^2 + 14x + 49) + 3x(x + 7) + (x - 4)(2x + 14)$.

1º) Factorise $A(x)$ et $B(x)$.

2º) Résous $A(x) = 0$ puis $A(x) = B(x)$.

3º) Soit $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$.

a) Pour quelles valeurs de x , $F(x)$ est-elle définie ?

b) Simplifie alors $F(x)$.

16 PROPORTIONNALITÉ

Objectifs

1. Résoudre des problèmes mettant en jeu des grandeurs directement proportionnelles.
2. Résoudre des problèmes mettant en jeu des grandeurs inversement proportionnelles.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Rappel
2. Grandeurs inversement proportionnelles
3. Exercices résolus

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 RAPPEL

1°) Proportion

⊙ $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux rapports égaux .

L'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ s'appelle une proportion .

1er terme — 3ème terme

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

2ème terme — 4ème terme

Le premier et le quatrième termes sont les **extrêmes**.

Le deuxième et le troisième termes sont les **moyens**.

⊙ Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors :

$a \times d = b \times c$ (le produit des moyens est égal au produit des extrêmes),

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (on a permuté les moyens),

$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (on a permuté les extrêmes),

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (on a inversé les deux rapports).

Application 1

Ecris toutes les proportions que tu peux former avec les nombres : 2,5 ; 20 ; 25 et 200 .

2°) Grandeurs directement proportionnelles

a) Deux grandeurs x et y sont **directement proportionnelles** lorsqu'on obtient les nombres de la seconde, y, en multipliant par un même nombre K ceux de la première, x.

***K* est le coefficient de proportionnalité.**

$$\boxed{y = Kx}$$

Remarque

De $y = Kx$, on tire $x = \frac{1}{K}y$; alors **x est directement proportionnelle à y**.

EXEMPLE

x	3	4	6	10
y	7,5	10	15	25

$\frac{7,5}{3} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{25}{10} = \mathbf{\frac{5}{2}}$.

$\frac{y}{x} = \frac{5}{2}$; $2y = 5x$; $y = \frac{5}{2}x$;

$\boxed{\boldsymbol{y = 2,5x}}$

***y* est directement proportionnelle à *x* ; 2,5 est le coefficient de proportionnalité.**

b) «*a, b* et *c* sont **directement proportionnels** à 4 ; 6 et 8» signifie que : $\boldsymbol{\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8}}$.

Application 2

1°) Dans chacun des tableaux suivants, les grandeurs *x* et *y* sont-elles directement proportionnelles ? si oui, complète l'écriture : $y = ... x$.

a)

x	1	0,1	0,2	0,3	0,5
y	65	6,5	13	19,5	32,5

b)

x	1,5	2	4	3	9
y	3	8	16	6	18

2°) Calcule les nombres *a* et *b* sachant que *a, b* et 6 sont directement proportionnels à 2; 4 et 3.

2 GRANDEURS INVERSEMENT PROPORTIONNELLES

a) Activité

1°) Complète les tableaux suivants.

x	2	6	9	13
y	6	18	27	39
$\frac{y}{x}$ (Fraction irréductible)				

z	2	3	4	6
t	18	12	9	6
$z \times t$				

2º) Complète.

Le rapport de y à x est : $\frac{y}{x} = \ldots$, alors $y = \ldots x$.

Le produit de z et t est : $z \times t = \ldots$, alors $z = \frac{\ldots}{t}$.

3º) Dans le premier tableau, les nombres de la première ligne sont-ils directement proportionnels à ceux de la deuxième ? quel est le coefficient de proportionnalité ?

4º) Dans le second tableau, les nombres de la première ligne sont-ils directement proportionnels à ceux de la deuxième ?

5º) Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité ?

z	2	3	4	6
$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$

b) Définition

Deux grandeurs x et y sont **inversement proportionnelles** s'il existe un **nombre constant** K tel que : $\boldsymbol{x \times y = K}$ **.**

Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, de $x \times y = K$, on tire : $x = K \times \frac{1}{y}$ et $y = K \times \frac{1}{x}$; c'est-à-dire l'une des deux grandeurs est directement proportionnelle à l'inverse de l'autre.

EXEMPLES

1.

x	1	2	4
y	20	10	5

$1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5 = 20.$

$\boldsymbol{x \times y = 20}$ **.**

Les deux grandeurs *x* et *y* sont inversement proportionnelles.

2.

x	3	6	7
y	4	2	4

$3 \times 4 = 6 \times 2 \neq 7 \times 4$.

Les deux grandeurs *x* et *y* ne sont pas inversement proportionnelles.

c) Remarque

«*a, b* et *c* sont **inversement proportionnels** à 4 ; 6 et 8» signifie que :

$\mathbf{4 \times a = 6 \times b = 8 \times c}$

ou que : $\dfrac{a}{\frac{1}{4}} = \dfrac{b}{\frac{1}{6}} = \dfrac{c}{\frac{1}{8}}$.

Ainsi, *a, b* et *c* sont **directement proportionnels aux inverses** de 4 ; 6 et 8.

Application 3

1°) Dans chacun des cas suivants, les grandeurs x et y sont-elles inversement proportionnelles ? si oui, complète l'écriture : $x \times y = ...$; $y = \dfrac{...}{x}$.

a)

x	8	1	2	4
y	8	64	32	16

b)

x	15	30	6	10	8
y	2	1	5	3	5

2°) Calcule les nombres a et b sachant que a, b et 6 sont inversement proportionnels à 2; 4 et 3.

3 EXERCICES RÉSOLUS

1. Soit à partager le nombre 60 en parties directement proportionnelles à 2 ; 3 et 5.

Si l'on désigne par a, b et c ces trois parties, alors :

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ et $a + b + c = 60.$

Posons $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = t$.

$\frac{a}{2} = t$ donne $a = 2t$;

$\frac{b}{3} = t$ donne $b = 3t$;

$\frac{c}{5} = t$ donne $c = 5t$.

Or : $a + b + c = 60.$

D'où : $2t + 3t + 5t = 60$; $10t = 60$; $t = \frac{60}{10} = 6.$

Par suite : $a = 2t = 2 \times 6 = 12$;
$b = 3t = 3 \times 6 = 18$;
$c = 5t = 5 \times 6 = 30$.

2. Soit à partager le nombre 61 en parties inversement proportionnelles à 3; 4 et 7.

Si l'on désigne par a, b et c ces trois parties, alors :

$3 \times a = 4 \times b = 7 \times c$ et $a + b + c = 61.$

Posons $3 \times a = 4 \times b = 7 \times c = t.$

$3 \times a = t$ donne $a = \frac{t}{3}$;

$4 \times b = t$ donne $b = \frac{t}{4}$;

$7 \times c = t$ donne $c = \frac{t}{7}$.

Or : $a + b + c = 61.$

D'où : $\frac{t}{3} + \frac{t}{4} + \frac{t}{7} = 61$; $\frac{28t + 21t + 12t}{84} = 61$;

$\frac{61t}{84} = 61$; $61t = 61 \times 84$; $t = 84$.

Par suite : $a = \frac{t}{3} = \frac{84}{3} = 28$;
$b = \frac{t}{4} = \frac{84}{4} = 21$;
$c = \frac{t}{7} = \frac{84}{7} = 12$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Calcule l'inconnue.

1º) $\dfrac{b+5}{b+2} = \dfrac{2}{5}$ **2º)** $\dfrac{t+1}{4} = \dfrac{t+2}{3}$ **3º)** $\dfrac{y-2}{7} = \dfrac{3}{y+2}$

2 **«Lorsque $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$, on dit que x est la moyenne proportionnelle entre a et b».**

Calcule la moyenne proportionnelle entre a et b, dans chacun des cas suivants.

1º) $a = 1$ et $b = 9$

2º) $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = \dfrac{50}{3}$

3º) $a = \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{27}$.

3 Démontre que le périmètre d'un carré est directement proportionnel à son côté; quel est le coefficient de proportionnalité ?

4 Calcule, dans chacun des cas suivants, la quatrième proportionnelle aux nombres donnés.

1º) 7 ; 8 et 3 **2º)** $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{5}$.

5 Partage le nombre 27 en parties directement proportionnelles à 2 ; 3 et 4.

6 Les deux grandeurs x et y sont inversement proportionnelles, complète le tableau suivant.

x	2	6	12	4
y	18			9

7 Partage le nombre 39 en parties inversement proportionnelles à 2; 3 et 4.

8 Partage le nombre 310 en parties inversement proportionnelles à 5 ; 7 et 10.

9 Réponds par vrai ou faux.

1º) Si les grandeurs x et y sont inversement proportionnelles, alors le produit $x \times y$ reste constant.

2º) Si $2x = 3y = 4z$, alors x, y et z sont inversement proportionnels à 2; 3 et 4.

3º) Si $2x = 3y = 4z$, alors x, y et z sont directement proportionnels à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

4º) Si $2x = 3y$, alors $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$.

5º) La longueur d'un cercle est inversement proportionnelle à son rayon.

6º) L'aire d'un disque est directement proportionnelle au carré de son rayon et π est le coefficient de proportionnalité.

7º) Si tu augmentes un prix à 100%, alors tu le multiplies par 2.

Pour chercher

10 Partage le nombre 1584 en parties inversement proportionnelles à 2 ; 5 ; 6 et 9.

11 x, y et z sont directement proportionnels à 3 ; 5 et 6.

Complète : $\frac{x}{\dots} = \frac{\dots}{5} = \frac{\dots}{\dots} = k$.

Exprime x, y et z à l'aide de k.

Tu sais de plus que : $2x + 3y + \frac{z}{2} = 48$.

Utilise cette relation pour calculer la valeur numérique de k.

Déduis alors les valeurs numériques de x, y et z.

12 x, y et z sont inversement proportionnels à 12 ; 6 et 4.

Complète : $\dfrac{x}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{\frac{1}{4}} = k$.

Exprime x, y et z à l'aide de k.

Tu sais de plus que : $2x - y + 3z = 9$.

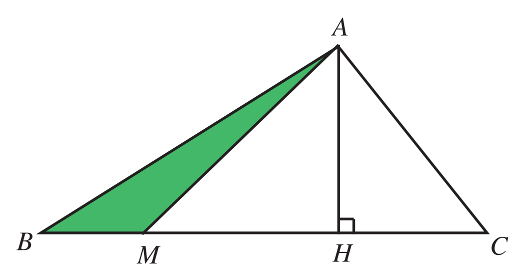
Utilise cette relation pour calculer la valeur numérique de k.

Déduis alors les valeurs numériques de x, y et z.

13 $BC = 7$

$AH = 5$

$BM = x$



1º) Exprime l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABM à l'aide de x.

2º) Les deux grandeurs $\mathscr{A}$ et x sont-elles directement proportionnelles ? si oui, trouve le coefficient de proportionnalité.

14 La demande de Jeans sur le marché est inversement proportionnelle au prix de vente.

Si les consommateurs achètent 1 500 Jeans lorsque le prix de vente est de 40 \$, alors quelle serait la demande si le prix de vente était fixé à 60 \$?

15 En travaillant 8 heures par jour, un maçon construirait un mur en 19 jours.

S'il veut l'achever en 16 jours, combien d'heures par jour doit-il travailler ?

TEST

1 Les deux grandeurs x et y sont inversement proportionnelles.

Complète le tableau suivant.

x	8	$\frac{1}{4}$		0,5	
y	2		$\frac{2}{3}$		0,5

(3 points)

2 Calcule le nombre x, dans chacun des cas suivants.

1°) x est la quatrième proportionnelle aux trois nombres 3; 4 et 6. **(1 point)**

2°) x est la moyenne proportionnelle entre les deux nombres 3 et 12. **(1 point)**

3°) $\frac{x-1}{2} = \frac{x}{3}$. **(2 points)**

3 Partage le nombre 120 en parties proportionnelles à 5; 7 et 8.

(3 points)

17 LE CERCLE

Objectifs

1. Connaître les positions relatives d'une droite et d'un cercle.
2. Déterminer les centres des cercles passant par deux points, par trois points non alignés.
3. Reconnaître et calculer la longueur d'un arc de cercle.

PLAN DU CHAPITRE

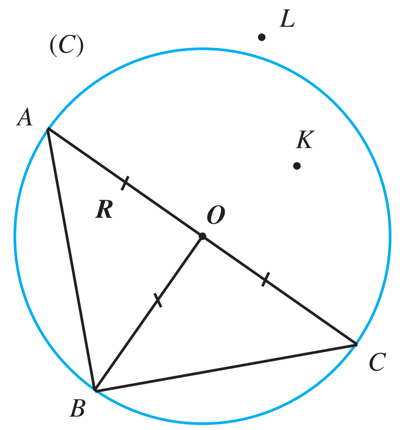
COURS

1. Généralités
2. Positions relatives d'une droite et d'un cercle
3. Cercles passant par deux points donnés
4. Cercle passant par trois points donnés
5. Arc de cercle
6. Propriété

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 GÉNÉRALITÉS



⊙ La ligne bleue ci-dessus représente un **cercle** (C) de **centre** O et de **rayon** R : elle est formée par les points dont la distance à O égale la constante R.

A est un point de (C) : $OA = R$.

K est un point à l'intérieur de (C) : $OK < R$.

L est un point à l'extérieur de (C) : $OL > R$.

⊙ Le centre $\boldsymbol{O}$ de (C) est un **centre de symétrie** de (C).

⊙ Un segment qui a pour extrémités le centre O et un point de (C) s'appelle **rayon** : [OA] et [OB] sont deux rayons de (C).

⊙ Un segment qui a pour extrémités deux points de (C) s'appelle **corde** : [AB] et [BC] sont deux cordes.

[AC] est une corde qui passe par le centre; on l'appelle **diamètre**.

A et C sont diamétralement opposés.

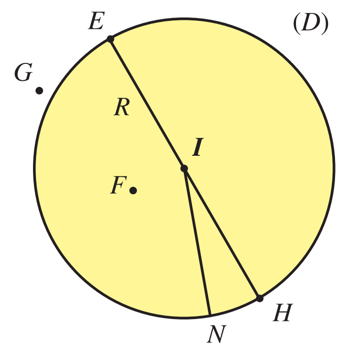
diamètre = 2 × rayon

⊙ Tout diamètre de (C) est un **axe de symétrie** de (C).

⊙ **Longueur** de (C) = $\underbrace{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi}}_{\pi \,=\, 3{,}14}\,\underbrace{\boldsymbol{R}}_{\text{rayon de } (C)}$.

3,14 rayon de (C)

⊙ La partie colorée ci-contre représente un **disque** (D) de **centre** I et de **rayon** R : elle est formée par les points dont la distance à I est égale ou inférieure à la constante R.
E est un point de (D) et $IE = R$.
F est un point de (D) et $IF < R$.
G est un point à l'extérieur de (D) et $IG > R$.



⊙ Le centre $\boldsymbol{I}$ de (D) est un **centre de symétrie** de (D).

⊙ Un segment qui a pour extrémités le centre I et un point E de (D) tel que $IE = R$, s'appelle **rayon** de (D) : [IE] et [IN] sont deux rayons de (D).

⊙ Si E, I et H sont trois points alignés de (D) avec $IE = IH = R$, alors [EH] est un diamètre de (D).

diamètre = 2 × rayon

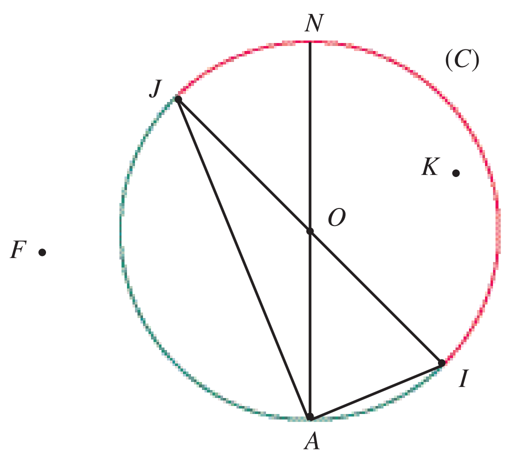
⊙ Tout diamètre de (D) est un **axe de symétrie** de (D).

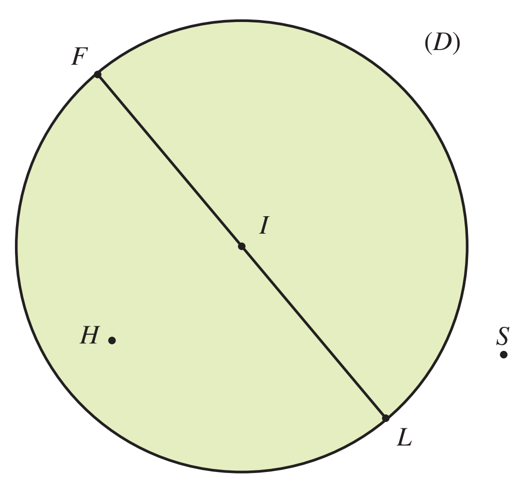
⊙ **Périmètre** de (D) = $\mathbf{2}\, \underbrace{\boldsymbol{\pi}}_{3,14}\, \underbrace{\boldsymbol{R}}_{\text{rayon}}$.

⊙ **Aire** de (D) = $\boldsymbol{\pi R^2}$ **.**

Application 1

Observe le cercle (C) et le disque (D) et réponds aux questions suivantes.





1°) Nomme deux rayons, un diamètre, deux cordes, un point à l'intérieur et un autre à l'extérieur de (C). O est-il un point de (C) ?

2°) Nomme un rayon et un diamètre de (D). I est-il un point de (D) ?

3°) Quel est le symétrique de A par rapport à O ?

4°) Nomme quatre points de (D).

5°) Le demi-cercle vert est-il superposable au demi-cercle rouge? Pourquoi?

6°) Utilise ton rapporteur pour trouver la mesure de $\widehat{IAJ}$.

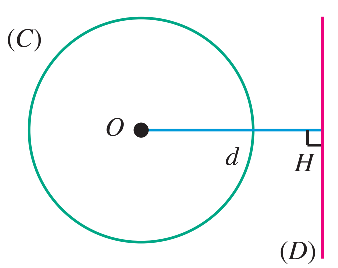
7°) Calcule la longueur de (C) lorsque $IJ = 0{,}5$ cm.

8°) Calcule le périmètre et l'aire de (D) lorsque $LF = 10$ cm.

2 POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

(C) est un cercle de centre O et de rayon r. Soit d la distance de O à (D) :

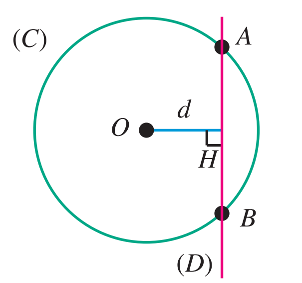
$$d = OH.$$



$d = OH > r$

(D) et (C) n'ont aucun point commun.

(D) est extérieure à (C).

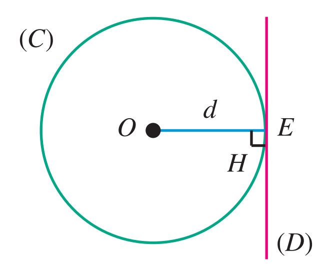


$d = OH < r$

(D) et (C) sont sécants.

Ils se coupent en A et B.

(D) est une sécante à (C).



$d = OH = r$

(D) et (C) sont tangents.

Ils ont un seul point commun E.

(D) est la tangente à (C) en E.

Application 2

1°) Trace une droite (D) et un point O dont la distance à (D) égale 4 cm.

2°) Trace les cercles $C\ (O\ ,\ 4\ \text{cm})$ et $C'\ (O\ ,\ 5\ \text{cm})$.

3°) Que peux-tu dire de (C') et (D) ? de (C) et (D) ? Justifie.

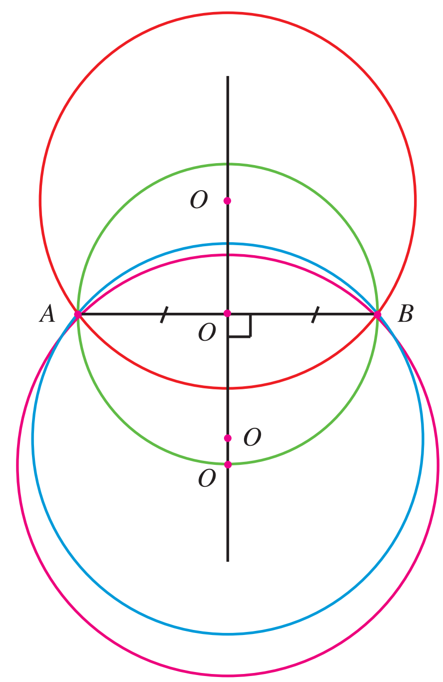
3 CERCLES PASSANT PAR DEUX POINTS DONNÉS

Propriété

A et B sont deux points donnés.

Si O est le centre d'un cercle qui passe par A et B, alors $OA = OB$, c'est-à-dire O est équidistant de A et B.

O se trouve donc sur la médiatrice de $[AB]$.



Une **infinité** de cercles passent par deux points donnés ***A*** et ***B***. Leurs **centres** se trouvent sur la **médiatrice de [*AB*]**.

Application 3

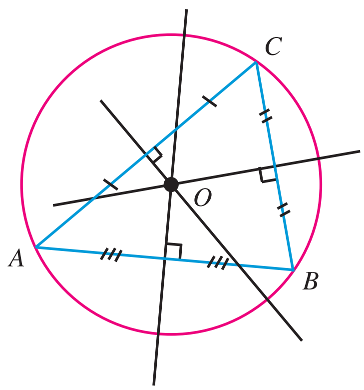
$[AB]$ est un segment de droite de mesure 4 cm.

1°) Trace le cercle (C) de diamètre $[AB]$.

2°) Trace deux autres cercles passant par A et B.

4 CERCLE PASSANT PAR TROIS POINTS DONNÉS

Propriétés

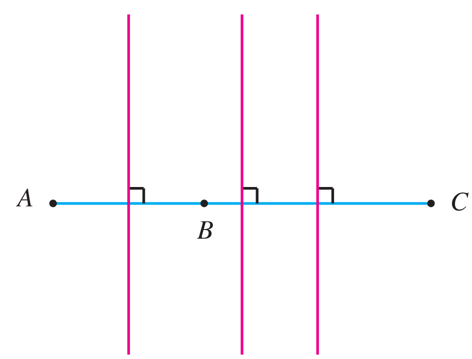


- Si O est le centre d'un cercle qui passe par A, B et C, alors $OA = OB = OC$. O, étant équidistant de A, B et C, est donc le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$, de $[AC]$ et de $[BC]$; ce point est unique.

Un seul cercle passe par trois points donnés non alignés.

Son **centre** est **l'intersection** des médiatrices de deux segments formés par ces trois points.

- Dans le cas où A, B et C sont alignés, les médiatrices de $[AB]$, de $[AC]$ et de $[BC]$ seront parallèles et O n'existe pas.



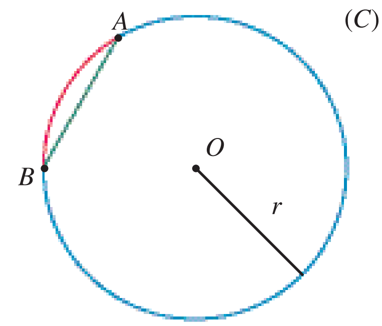
Aucun cercle ne passe par trois points **alignés**.

Application 4

1°) Construis un triangle ABC connaissant $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 5$.

2°) Trace le cercle passant par A, B et C. Que représente le centre de ce cercle pour $[BC]$?

5 ARC DE CERCLE



(C) est un cercle de centre O et de rayon r. A et B sont deux points de (C).

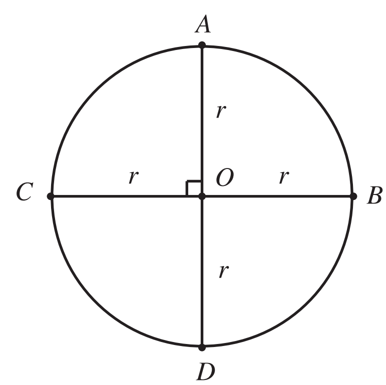
La partie de (*C*) limitée par *A* et *B*, s'appelle **arc de cercle** d'extrémités A et B.

A et B déterminent donc deux arcs de cercle; le plus **petit** de ces deux arcs est noté $\overset{\frown}{AB}$.

On dit que la **corde [*AB*] sous-tend l'arc** $\overset{\frown}{AB}$.

Remarque

Un arc de cercle a une longueur.



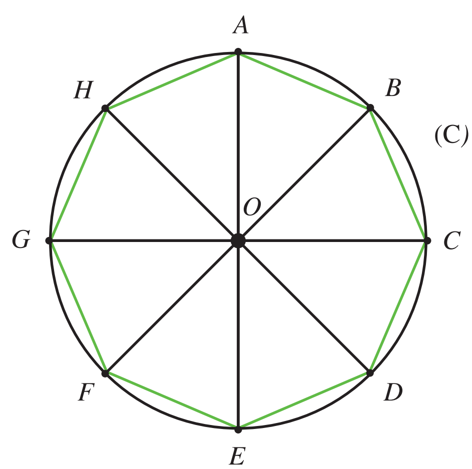
La longueur du cercle (C) est $2\,\pi\,r$.

La longueur de $\overset{\frown}{AB}$ est $\dfrac{2\,\pi\,r}{4} = \dfrac{\pi\,r}{2}$.

La longueur de $\overset{\frown}{BC}$ est $\dfrac{2\,\pi\,r}{2} = \pi\,r$.

Application 5

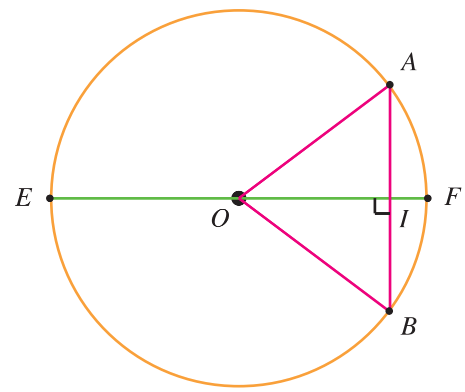
Observe la figure suivante et réponds.



1º) Nomme quatre arcs de (C) et les cordes qui les sous-tendent.

2º) Les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FG}$, $\overset{\frown}{GH}$ et $\overset{\frown}{HA}$ sont de même longueur; calcule cette longueur et celle de l'arc $\overset{\frown}{AF}$.

6 PROPRIÉTÉ



Dans un cercle, **tout diamètre perpendiculaire à une corde, passe par le milieu de cette corde.**

Hypothèse	**Conclusion**
$[EF]$ est un diamètre	I est le milieu
$[AB]$ est une corde	de $[AB]$
$[EF] \perp [AB]$ en I	

Démonstration

Joignons O à A et à B.

$OA = OB$ (rayon du cercle), le triangle OAB est donc isocèle de sommet principal O.

$[OI]$ est un segment-hauteur dans ce triangle.

Or, dans un triangle isocèle, la hauteur relative à la base est la médiatrice de cette base. Alors I est le milieu de $[AB]$.

Application 6

(C) est un cercle de centre O; $[AB]$ est une corde de (C) de milieu I.

Démontre que le diamètre $[EF]$ passant par I est perpendiculaire à $[AB]$. Déduis-en une propriété que tu retiendras.

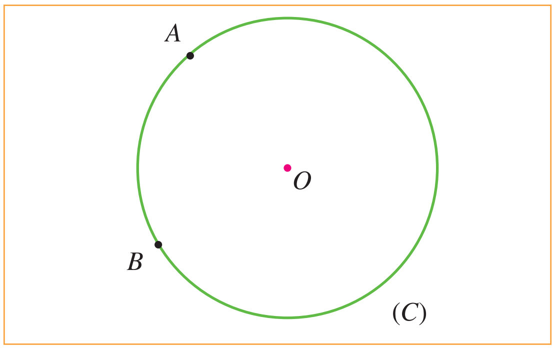
Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 A et B sont deux points d'un cercle (C) de centre O.

F est le point diamétralement opposé à B dans (C). (AO) recoupe (C) en E.

Démontre que $ABEF$ est un rectangle.



2 (C) est un cercle de centre O et de rayon $r = 4$ cm.

$[AB]$ est une corde de (C) de longueur 4 cm.

1°) Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifie.

2°) Colorie le petit arc que sous-tend la corde $[AB]$.

3°) E est le symétrique de A par rapport à O. Démontre que E est un point de (C).

3 **1°)** Place sur une droite (d) les points A, B, E, D tels que :

$AB = 5$ cm, $BE = 3$ cm (E est à l'extérieur de $[AB]$), $AD = 4$ cm (D n'est pas entre A et B).

2°) Trace $C\,(A, 5$ cm$)$, c'est-à-dire le cercle (C) de centre A et de rayon 5 cm.

3°) Trace les perpendiculaires en B, E et D à (d). Etudie la position de chacune de ces perpendiculaires par rapport à (C).

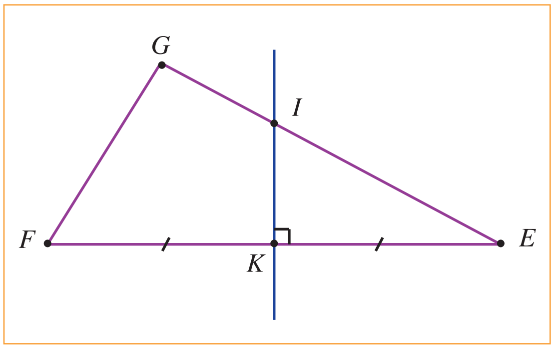
4 Construis le triangle EFG et son cercle circonscrit, dans chacun des cas suivants.

1°) $EF = 5$ cm , $EG = 8$ cm , $\widehat{FEG} = 110°$.

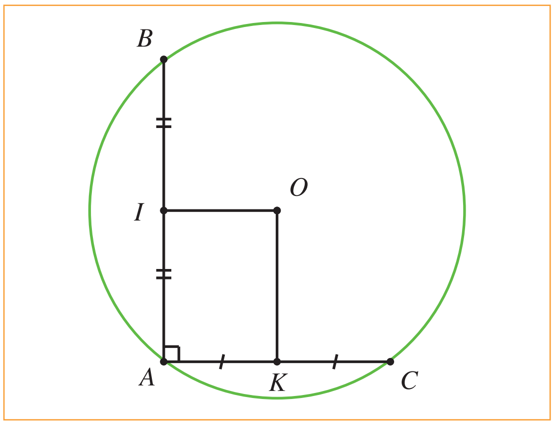
2°) $EF = 5$ cm , $EG = 8$ cm , $\widehat{FEG} = 70°$.

3°) $EF = 5$ cm , $EG = 8$ cm , $\widehat{FEG} = 90°$.

5 Montre que $C\,(I\,,\,IE)$ passe par F.



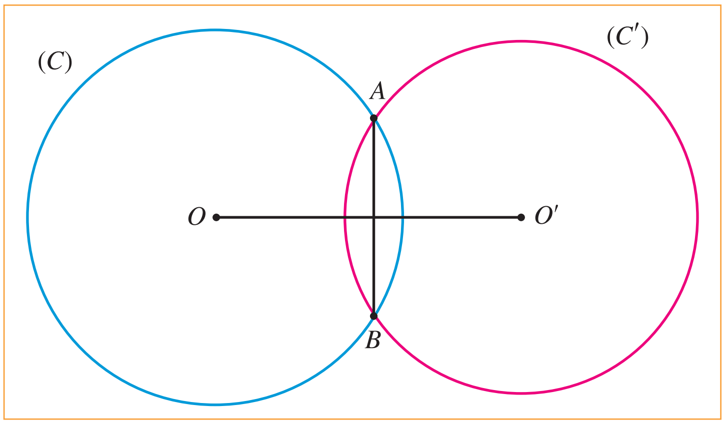
6 Observe la figure ci-contre et montre que le quadrilatère $OIAK$ est un rectangle.



7 Dans la figure ci-contre :

1°) démontre que (OO') est la médiatrice de $[AB]$.

2°) Quelle condition faut-il imposer à (C) et (C') pour que le quadrilatère $OAO'B$ soit un losange ?



8 Réponds par vrai ou faux.

1°) Si A, B et C sont trois points alignés, alors les médiatrices de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ sont parallèles.

2°) Le centre du cercle circonscrit à un triangle (cercle passant par les trois sommets du triangle) n'est pas toujours à l'intérieur de ce triangle.

3°) On peut toujours faire passer un cercle par trois points donnés.

4°) Le centre d'un cercle est le milieu de n'importe quel diamètre de ce cercle.

5°) Le cercle a un seul axe de symétrie.

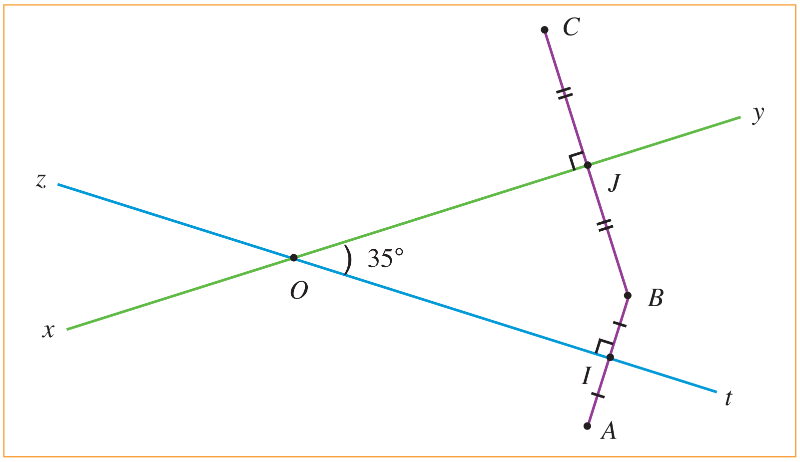
6°) La longueur de la plus grande corde, dans un cercle de rayon 8 cm, est de 12 cm.

Pour chercher

9 Dans la figure ci-contre,

1º) démontre que le cercle de centre O et de rayon OA passe par B et C.

2º) démontre que $\widehat{AOC} = 70°$.

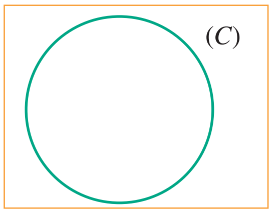


10 **1º)** Construis un triangle ABC tel que AB = 6 cm, BC = 13 cm et AC = 7,5 cm.

2º) Trace un arc de cercle passant par A, B et C.

11 Nabil a tracé un cercle (C) et a perdu la position de son centre O.

Aide-le à retrouver O.



12 A et B sont deux points donnés.

1º) Combien y a-t-il de cercles ayant pour rayon le segment [AB] ?

2º) Combien y a-t-il de cercles ayant pour rayon la longueur AB ?

13 Place deux points E et F tels que EF = 6 cm.

Colorie la région de la feuille formée par les points qui sont à moins de 4 cm de E et à moins de 4 cm de F.

14 Avec deux ficelles F_1 et F_2 de même longueur égale à 25,12 cm, on fabrique un cercle (C) et un carré (R).

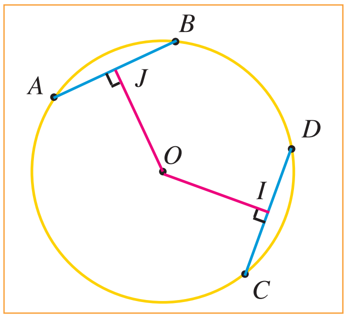
Compare les aires de (R) et du disque (D) limité par (C).

15 Observe la figure ci-contre .

Démontre que :

1º) si $AB = CD$, alors O est équidistant de [AB] et [CD] .

2º) si $OI = OJ$, alors $AB = CD$.



TEST

1 **1º)** Trace un cercle de centre O et une corde $[AB]$ de ce cercle.

2º) Montre que la médiatrice de $[AB]$ passe par O. **(1,5 point)**

3º) La médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle en M et N. Cite tous les triangles isocèles de la figure et explique pourquoi ils sont isocèles. **(1,5 point)**

2 Combien de personnes peuvent se placer, l'un à côté de l'autre, autour d'une piscine ronde de 36 m de diamètre, si chaque personne occupe 72 cm ?

(2 points)

3 L'aire d'un disque est de 530,66 cm^2. Calcule son diamètre. **(2 points)**

4 Trois points A, B, C partagent un cercle C $(O$, 90 cm$)$ en trois arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ de longueurs respectives ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 .

Calcule ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 sachant que ℓ_1 est le double de ℓ_2 et que ℓ_3 est le triple de ℓ_1 .

(3 points)

18 POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

Objectif

Connaître les positions relatives de deux cercles.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Ligne des centres

2. Cercles extérieurs

3. Cercles intérieurs

4. Cercles tangents extérieurement

5. Cercles tangents intérieurement

6. Cercles sécants

7. Réciproques

8. Ligne des centres : axe de symétrie

EXERCICES ET PROBLÈMES

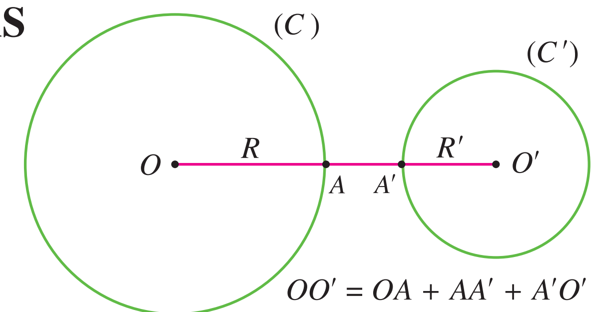
TEST

1 LIGNE DES CENTRES

Soit (C) un cercle de centre O, de rayon R et (C') un cercle de centre O', de rayon R'.

La droite (OO') s'appelle : la ligne des centres.

2 CERCLES EXTÉRIEURS



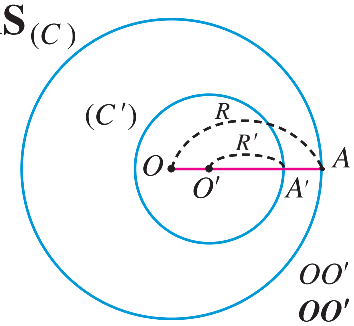
$OO' = OA + AA' + A'O'$

$\boldsymbol{OO' = R +} AA' \boldsymbol{+ R'}$

Ces deux cercles n'ont **aucun point commun**, ils sont dits **extérieurs**.
La figure ci-contre montre que :

$$\boxed{OO' > R + R'}$$

3 CERCLES INTÉRIEURS



$OO' = OA - O'A' - A'A$

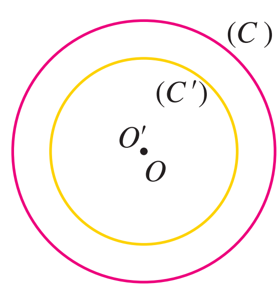
$\boldsymbol{OO' = R - R'} - A'A$

Ces deux cercles n'ont **aucun point commun**, ils sont dits **intérieurs**.
La figure ci-contre montre que :

$$\boxed{OO' < R - R'}$$

Remarque

Si les **centres** O et O' sont **confondus**, les deux cercles sont appelés **cercles concentriques.**

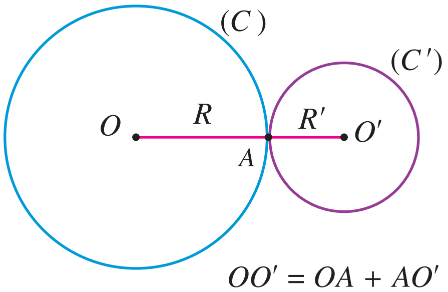


4 CERCLES TANGENTS EXTÉRIEUREMENT

Ces deux cercles ont **un seul point commun A**, ils sont dits **tangents extérieurement**.

La figure ci-contre montre que :

$$\boldsymbol{OO' = R + R'}$$



$OO' = OA + AO'$
$\boldsymbol{OO' = R + R'}$

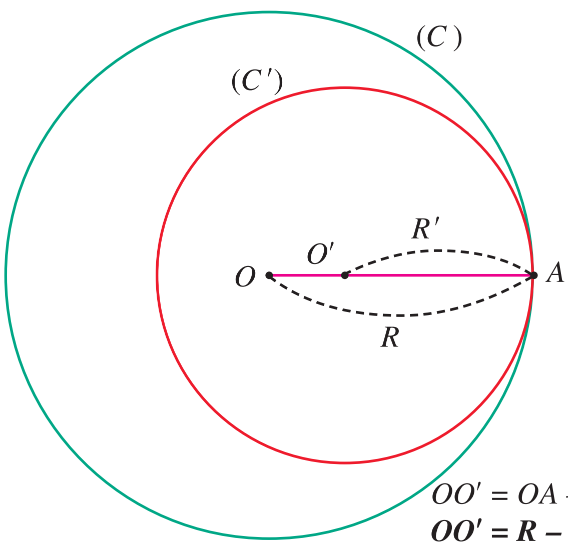
Le point commun A s'appelle **le point de tangence**; il se trouve sur la ligne des centres (OO').

5 CERCLES TANGENTS INTÉRIEUREMENT

Ces deux cercles ont **un seul point commun A**, ils sont dits **tangents intérieurement**.

La figure ci-contre montre que :

$$\boldsymbol{OO' = R - R'}$$



$OO' = OA - O'A$
$\boldsymbol{OO' = R - R'}$

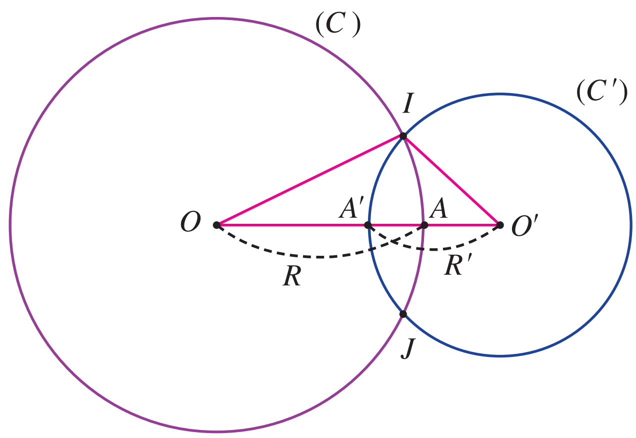
***A* est le point de tangence**; il se trouve sur (OO').

6 CERCLES SÉCANTS

Ces deux cercles ont **deux points communs** $\boldsymbol{I}$ **et** $\boldsymbol{J}$, ils sont dits **sécants**.

La figure ci-contre montre que :

$$\boldsymbol{R - R' < OO' < R + R'}$$



OO' est le plus court chemin entre les points O et O'.

$OO' < OI + O'I$ et $OI < OO' + O'I$

$OO' < R + R'$ et $OO' > R - R'$. D'où

$$\boldsymbol{R - R' < OO' < R + R'}$$

Le segment $\boldsymbol{[IJ]}$ s'appelle la **corde commune** de (C) et (C').

Remarque

$OI = OJ = R$ et $O'I = O'J = R'$.
(OO') est donc la médiatrice de $[IJ]$.

7 RÉCIPROQUES

(C) et (C') sont deux cercles de centres O et O', de rayons R et R', respectivement.

- **Si $OO' > R + R'$, alors (C) et (C') sont extérieurs**
- **Si $OO' < R - R'$, alors (C) et (C') sont intérieurs (avec $R > R'$)**
- **Si $OO' = R + R'$, alors (C) et (C') sont tangents extérieurement**
- **Si $OO' = R - R'$, alors (C) et (C') sont tangents intérieurement (avec $R > R'$)**
- **Si $R - R' < OO' < R + R'$, alors (C) et (C') sont sécants (avec $R > R'$)**

Application

$C\,(O\,,R)$ et $C'\,(O'\,,R')$ sont deux cercles tels que $R = 6$ cm et $R' = 4$ cm.
Sans tracer la figure, étudie la position de ces deux cercles, dans chacun des cas suivants :

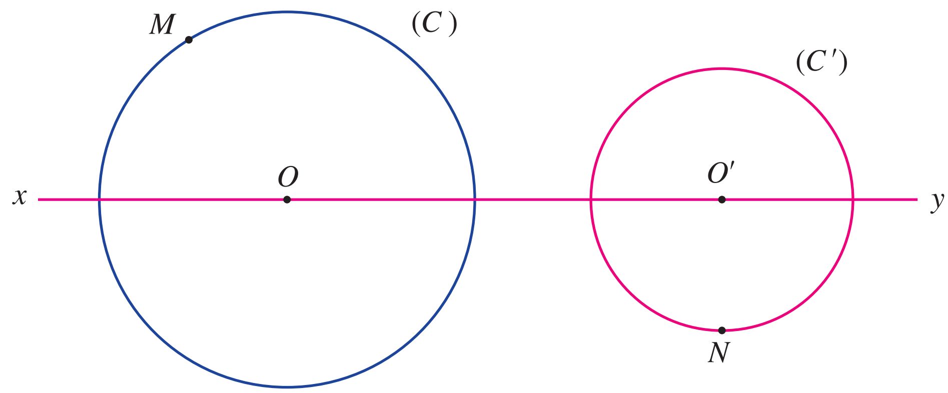
1°) $OO' = 12$ cm. **2°)** $OO' = 10$ cm. **3°)** $OO' = 3$ cm.
4°) $OO' = 1$ cm. **5°)** $OO' = 2$ cm.

8 LIGNE DES CENTRES : AXE DE SYMÉTRIE

Activité

(C) et (C') sont deux cercles de centres O et O'; (xy) est le support du segment $[OO']$.

1°) M est un point de (C).



- **a)** Construis le point M', symétrique de M par rapport à (xy). Quel est le rôle de (xy) pour le segment $[MM']$?
- **b)** Où se trouve alors M' ?

2°) N est un point de (C').

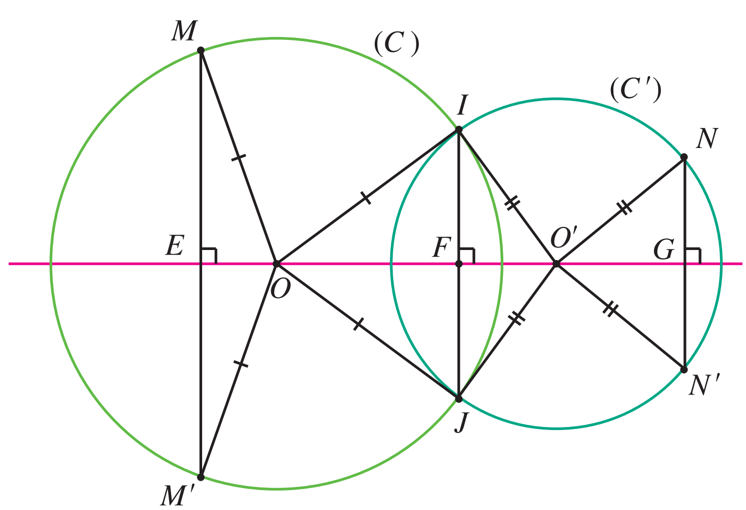
- **a)** Construis le point N', symétrique de N par rapport à (xy). Quel est le rôle de (xy) pour le segment $[NN']$?
- **b)** Où se trouve alors N' ?

3°) Peut-on déduire que la droite (xy) est un axe de symétrie de cette figure ?

Propriété

La ligne des centres (OO') est la médiatrice de $[MM']$, de $[IJ]$ et de $[NN']$ avec M et N quelconques sur (C) et (C').

(OO') est l'axe de symétrie de la figure.



Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

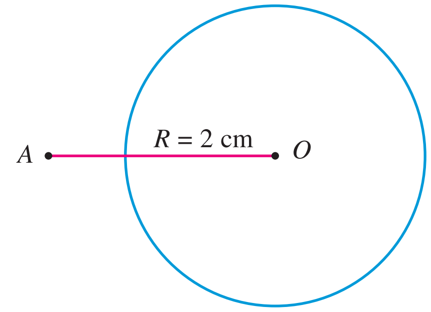
1 $C\,(O\,,R)$ et $C'\,(O'\,,R')$ sont deux cercles donnés avec R et R' exprimés en cm.

Complète le tableau suivant.

R	R'	OO'	Relation entre OO', $R-R'$ et $R+R'$	Position de (C) et (C')
3	4	8		
2	5			Tangents extérieurement
8		3	$OO' = R - R'$	
9	4	7		
10	6	2		
5,2		9	$OO' = R + R'$	

2 (C) est un cercle de centre O et de rayon $R = 2$ cm et A un point tel que $OA = 3$ cm. Il existe deux cercles de centre A et tangents à (C).

Construis ces deux cercles et calcule leurs rayons.



3 **1°)** Construis un cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm puis place un point A sur (C).

2°) Construis les cercles (C_1) et (C_2) de même rayon 1 cm et tangents en A à (C).

3°) Quelle est la position de (C_1) et (C_2) ?

4 Réponds par vrai ou faux.

1º) Deux cercles tangents extérieurement ou intérieurement ont un point commun.

2º) Deux cercles qui n'ont aucun point commun sont sécants.

3º) Deux cercles intérieurs n'ont aucun point commun.

4º) Deux cercles de même centre et de rayons différents sont concentriques.

5º) La droite joignant les centres de deux cercles est leur corde commune.

6º) (C) et (C') sont deux cercles de centres O et O', de rayons R et R', respectivement, avec $R = 8$ cm et $R' = 4$ cm.

a) Si $OO' = 3$ cm, alors (C) et (C') sont extérieurs.

b) Si $OO' = 12$ cm, alors (C) et (C') sont tangents intérieurement.

c) Si $OO' = 10$ cm, alors (C) et (C') sont sécants.

d) Si (C) et (C') se coupent en A et B, alors (AB) est la médiatrice de $[OO']$.

e) (OO') est l'axe de symétrie de la figure.

Pour chercher

5 (C_1) est un cercle de centre O_1 et de rayon $R_1 = 6$ cm; (C_2) est un autre cercle de centre O_2 et de rayon R_2 avec $O_1O_2 = 10$ cm.
Comment faut-il choisir R_2 pour que :
1º) (C_1) et (C_2) soient extérieurs ?
2º) (C_1) et (C_2) soient tangents extérieurement ?

6 (C_1) est un cercle de centre O_1 et de rayon $R_1 = 8$ cm; (C_2) est un autre cercle de centre O_2 et de rayon R_2 avec $O_1O_2 = 5$ cm.
Comment faut-il choisir R_2 pour que :
1º) (C_1) et (C_2) soient intérieurs ?
2º) (C_1) et (C_2) soient tangents intérieurement ?

7 ABC est un triangle rectangle en A. On trace le cercle (C_1) de centre B, de rayon BA et le cercle (C_2) de centre C, de rayon CA.
1º) Quelle est la position de (C_1) et (C_2) ?
2º) Soit D le second point d'intersection de (C_1) et (C_2).
a) Montre que les deux triangles ABC et BDC sont superposables.
b) Quelle est alors la nature du triangle BDC ?

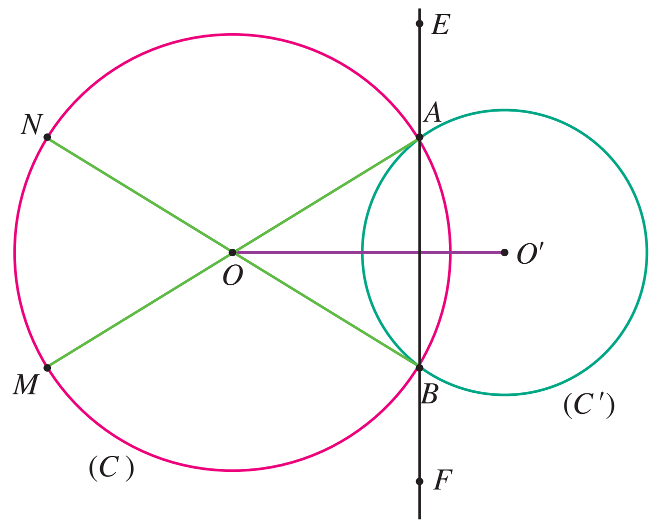
8 ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm.

1º) Où se trouve le centre O du cercle (C) circonscrit au triangle ABC ? Construis (C).

2º) Vérifie que O est équidistant de (AB), (AC) et (BC).

9 Soit (C) un cercle de centre O, A un point intérieur à (C) et B un point de (C). (C') est le cercle passant par A et B et de centre O' situé sur $[OB]$.
Précise la position de O' et celle de (C) par rapport à (C').

10 (C) et (C') sont deux cercles de centres respectifs O et O', se coupant en A et B. La droite (OA) recoupe (C) en M et la droite (OB) le recoupe en N.



1°) Montre que le quadrilatère $ABMN$ est un rectangle.
2°) Montre que (OO') est la médiatrice de $[MN]$.
3°) Sur la droite (AB), on place les points E et F tels que $AE = BF$ (voir figure). Montre que $ME = NF$.

TEST

1 Deux cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O' et de même rayon R se coupent en A et B.
Démontre que le quadrilatère $OAO'B$ est un losange. **(2 points)**

2 $C(O, R)$ et $C'(O', R')$ sont deux cercles donnés.
Complète le tableau suivant.

R	R'	OO'	Position de (C) et (C')
4	3	8	
4	3		Tangents extérieurement
4	3	5	
7		4	Tangents intérieurement
7	3	2	
5	3	0	

(6 points)

3 $C_1(O_1, R_1)$ et $C_2(O_2, R_2)$ sont deux cercles tangents extérieurement et tels que $O_1O_2 = 12$ cm.
Calcule R_1 et R_2 lorsque $R_1 = 3R_2$. **(2 points)**

19 ARCS ET ANGLES

Objectifs

1. Connaître et utiliser la relation entre la mesure de l'angle au centre d'un cercle et celle de l'arc intercepté.
2. Connaître et utiliser la relation entre la mesure de l'angle inscrit dans un cercle et celle de l'arc intercepté.
3. Calculer l'aire d'un secteur circulaire.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

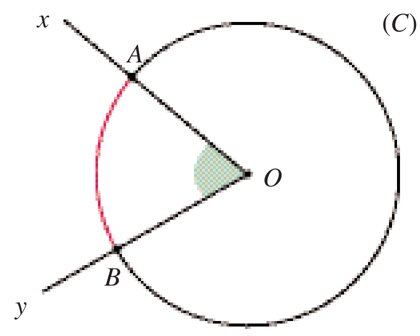
1. Cercle et angles
2. Angle au centre et mesure d'un arc
3. Mesure d'un angle inscrit
4. Mesure d'un angle intérieur
5. Mesure d'un angle extérieur
6. Exercices résolus
7. Propriétés
8. Triangle rectangle et cercle
9. Secteur circulaire

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 CERCLE ET ANGLES

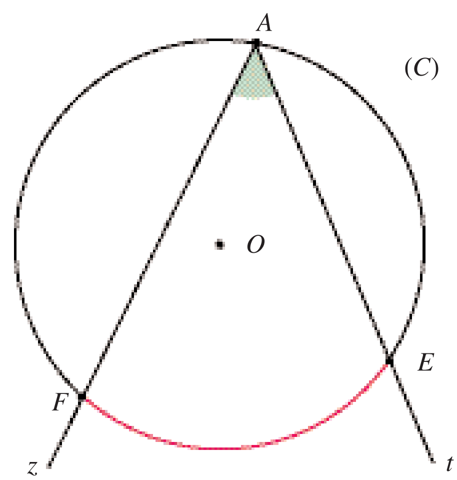
1°) Angle au centre



Un **angle au centre** est un angle qui a pour **sommet** le **centre du cercle**.

$\widehat{xOy}$ est un angle au centre; il intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

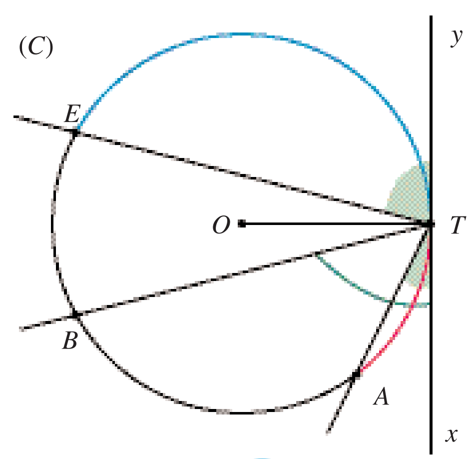
2°) Angle inscrit



Un **angle inscrit** est un angle qui a pour **sommet** un **point du cercle** et dont les côtés recoupent le cercle.

$\widehat{zAt}$ est un angle inscrit; il intercepte l'arc $\overset{\frown}{EF}$.

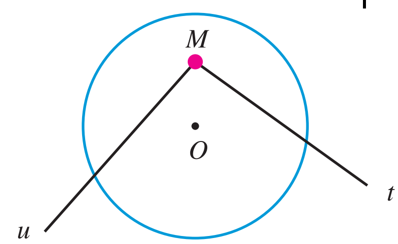
3°) Angle formé par une tangente et une corde dont une extrémité est le point de tangence



Un **angle** formé par une **tangente** et une **corde** dont une extrémité est le point de tangence, est considéré comme étant **un angle inscrit**.

$\widehat{ATx}$, $\widehat{BTx}$ et $\widehat{ETy}$ sont des angles inscrits.

4°) Angle intérieur

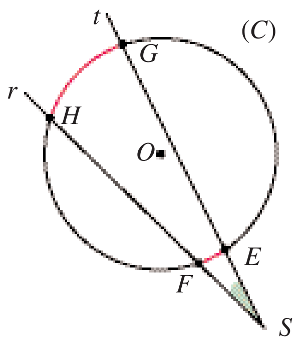


Un **angle intérieur** est un angle qui a pour **sommet** un **point à l'intérieur du cercle**.

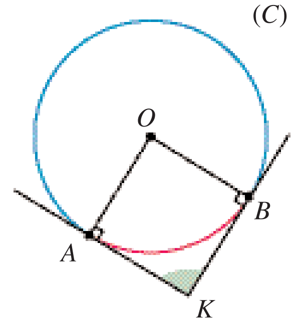
$\widehat{uMt}$ est un angle intérieur.

5°) Angle extérieur

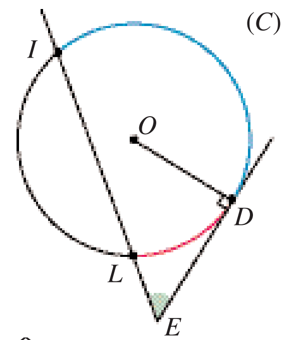
Un **angle extérieur** est un angle qui a pour **sommet un point à l'extérieur du cercle** et dont les côtés coupent le cercle.



$\widehat{rSt}$ est un angle extérieur; il intercepte les deux arcs $\overset{\frown}{EF}$ et $\overset{\frown}{GH}$.



$\widehat{BKA}$ est un angle extérieur; il intercepte les deux arcs d'extrémités A et B.



$\widehat{DEL}$ est un angle extérieur; il intercepte les deux arcs $\overset{\frown}{DI}$ et $\overset{\frown}{DL}$.

Application 1

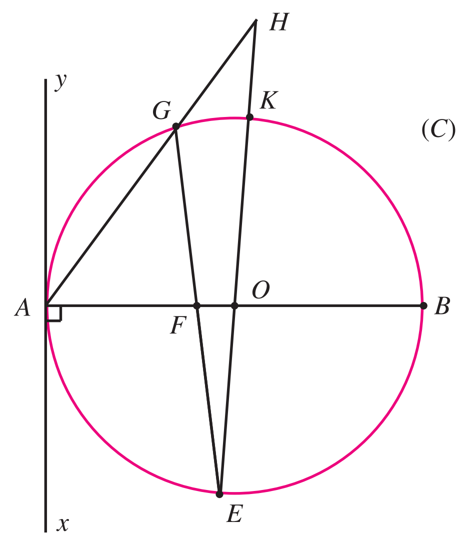
Observe la figure et nomme :

1°) deux angles au centre,

2°) six angles inscrits,

3°) un angle intérieur,

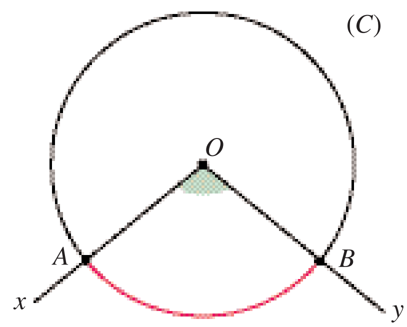
4°) un angle extérieur.



2 ANGLE AU CENTRE ET MESURE D'UN ARC

⊙ Un **arc** $\overset{\frown}{AB}$ a une **mesure** notée $\widehat{AB}$.

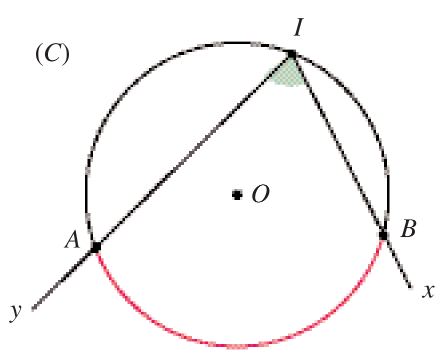
⊙ Dans un cercle, **l'angle au centre et l'arc qu'il intercepte ont la même mesure.** Cette mesure est exprimée en degrés, par exemple.



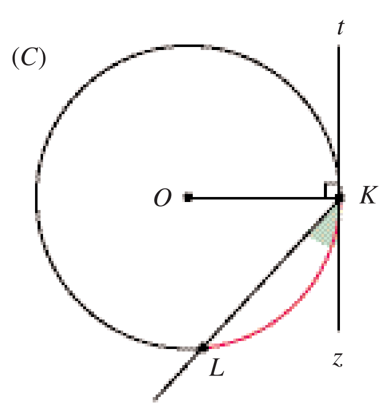
$$\widehat{xOy} = \widehat{AB}$$

3 MESURE D'UN ANGLE INSCRIT

Dans un cercle, un angle inscrit vaut la moitié de la mesure de l'arc qu'il intercepte.



$$\widehat{xIy} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

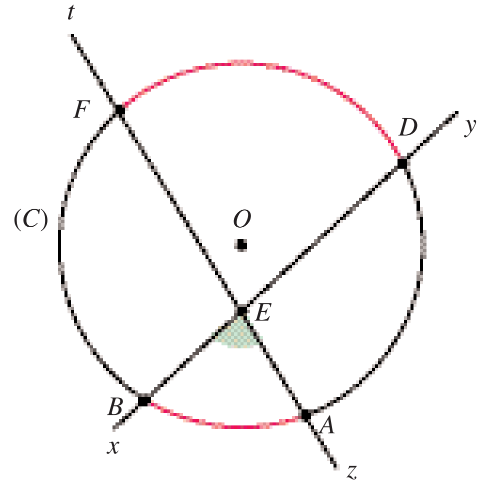


$$\widehat{LKz} = \frac{\widehat{LK}}{2}$$

4 MESURE D'UN ANGLE INTÉRIEUR

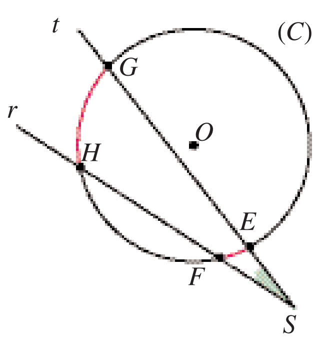
$$\widehat{yEt} = \widehat{xEz} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DF}}{2}$$

$$\text{et } \widehat{xEt} = \widehat{zEy} = \frac{\overset{\frown}{BF} + \overset{\frown}{AD}}{2}$$

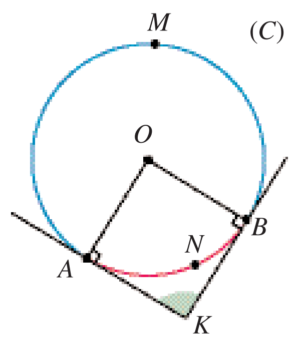


5 MESURE D'UN ANGLE EXTÉRIEUR

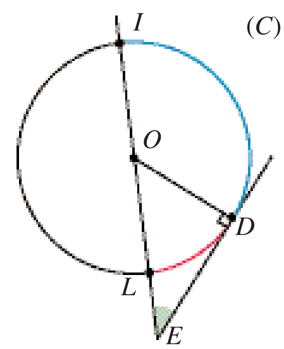
Dans un cercle, un angle extérieur vaut la demi-différence des mesures des deux arcs qu'il intercepte.



$$\widehat{tSr} = \frac{\overset{\frown}{HG} - \overset{\frown}{FE}}{2}$$



$$\widehat{BKA} = \frac{\overset{\frown}{AMB} - \overset{\frown}{ANB}}{2}$$



$$\widehat{IED} = \frac{\overset{\frown}{DI} - \overset{\frown}{LD}}{2}$$

6 EXERCICES RÉSOLUS

Enoncé 1

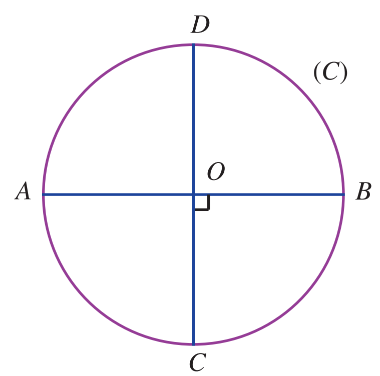
Soit [AB] et [CD] deux diamètres perpendiculaires d'un cercle (C) de centre O et de rayon 5 cm.

1°) Nomme l'arc intercepté par chacun des angles : $\widehat{DOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ et $\widehat{AOD}$, puis calcule la mesure de chacun de ces arcs.

2°) Déduis-en la mesure du cercle (C).

3°) Calcule la longueur du cercle (C).

Solution



1°) L'angle $\widehat{BOD}$ intercepte l'arc $\overset{\curvearrowright}{BD}$, $\widehat{BOC}$ intercepte $\overset{\curvearrowright}{BC}$, $\widehat{COA}$ intercepte $\overset{\curvearrowright}{CA}$ et $\widehat{AOD}$ intercepte $\overset{\curvearrowright}{AD}$.

$\widehat{DOB} = 90°$ car $[AB] \perp [CD]$.

C'est un angle au centre, donc

$\widehat{DOB} = \overset{\frown}{DB}$. Par suite : $\overset{\frown}{DB} = 90°$.

On démontre de même que : $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{AD} = 90°$.

2°) La mesure de (C) est égale à la somme des mesures des arcs $\overset{\curvearrowright}{AC}$, $\overset{\curvearrowright}{CB}$, $\overset{\curvearrowright}{BD}$ et $\overset{\curvearrowright}{DA}$.

La mesure de (C) est donc : $90° + 90° + 90° + 90° = 360°$.

3°) La longueur de (C) est : $2 \times \pi \times r = 2 \times 3{,}14 \times 5 = 31{,}4$ cm.

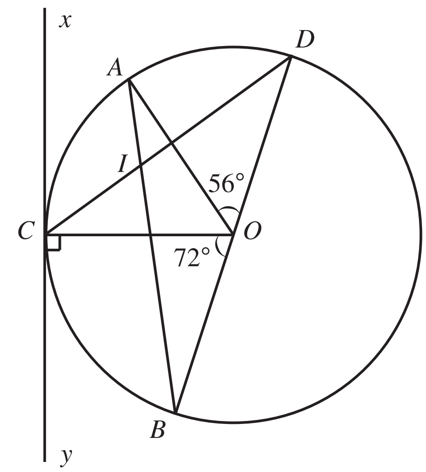
Attention !

> Il ne faut pas confondre entre la longueur d'un cercle ($2 \times \pi \times r$) et la mesure de ce cercle (360°).

Enoncé 2

Observe la figure ci-contre et calcule les angles :

$\widehat{AOC}$ **,** $\widehat{CIB}$ **et** $\widehat{DCx}$ **.**



Solution

Calcul de $\widehat{AOC}$

Les points D, O et B sont alignés.

Donc $\widehat{DOB}$ est un angle plat :

$\widehat{DOA} + \widehat{AOC} + \widehat{COB} = 180°$,

$56° + \widehat{AOC} + 72° = 180°$,

$\widehat{AOC} = 180° - 56° - 72°$,

$\widehat{AOC} = 52°$.

Calcul de $\widehat{CIB}$

Les trois angles $\widehat{DOA}$, $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COB}$ sont des angles au centre; ils interceptent respectivement les trois arcs $\overset{\frown}{DA}$, $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{CB}$.

Or, l'angle au centre et l'arc qu'il intercepte ont la même mesure.

Alors $\overset{\frown}{DA} = 56°$, $\overset{\frown}{AC} = 52°$ et $\overset{\frown}{CB} = 72°$.

$\widehat{CIB}$ est un angle intérieur; alors :

$$\widehat{CIB} = \frac{\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{DA}}{2} = \frac{72° + 56°}{2} = 64° .$$

Calcul de $\widehat{DCx}$

$\widehat{DCx}$ est formé par la tangente au cercle en C et la corde $[CD]$. Il est considéré comme un angle inscrit.

$$\widehat{DCx} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{56° + 52°}{2} = 54° .$$

Application 2

1°) Trace un cercle (C) de centre O et de rayon 4 cm.

2°) Soit $[AB]$ une corde de (C) de longueur 4 cm. Calcule la mesure et la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

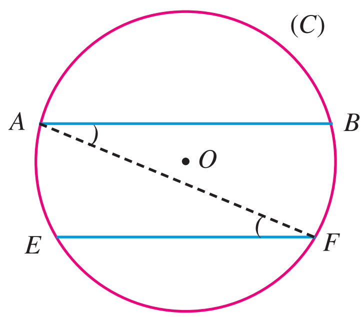
Indication : Utilise la règle de trois pour le calcul de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

7 PROPRIÉTÉS

1°) Dans un cercle, **deux cordes parallèles déterminent entre elles deux arcs de même mesure.**

Dans le cercle (C) ci-contre, les deux cordes $[AB]$ et $[EF]$ sont parallèles; alors :

$$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF} .$$

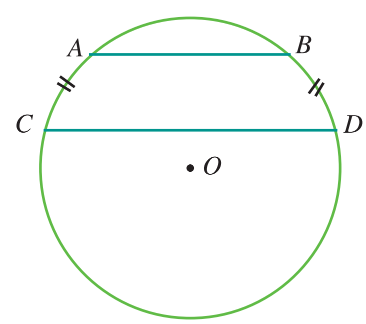


2°) Dans le cercle (C) ci-contre, les cordes $[AB]$ et $[CD]$ déterminent entre elles deux arcs de même mesure :

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

Alors ces deux cordes sont parallèles :

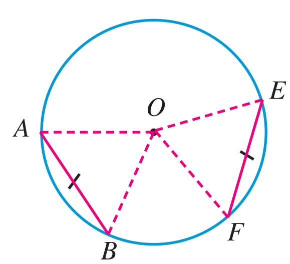
$(AB) \mathbin{//} (CD)$.



3°) Dans un cercle, **deux cordes isométriques sous-tendent deux arcs de même mesure.**

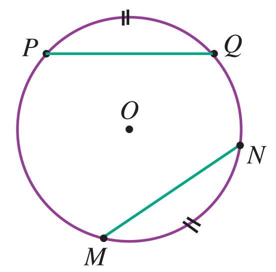
Dans le cercle (C) ci-contre, les deux cordes $[AB]$ et $[EF]$ sont isométriques; alors :

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{EF} .$$



4°) Dans un cercle, **deux arcs de même mesure sont sous-tendus par deux cordes isométriques.**

Dans le cercle (C) ci-contre, les deux arcs $\overset{\frown}{PQ}$ et $\overset{\frown}{MN}$ ont la même mesure; alors : $PQ = MN$.



8 TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE

Activité

1°) Construis un triangle ABC tel que $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm.

2°) Utilise la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

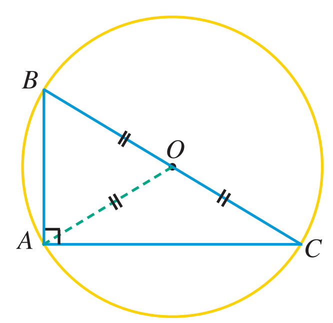
3°) Soit I le milieu de $[BC]$; démontre que $IA = IB = IC$.

4°) Trace alors le cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

5°) Quel rôle joue $[BC]$ par rapport au cercle (C) ? par rapport au triangle ABC ?

Propriété 1

Tout triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'hypoténuse de ce triangle.

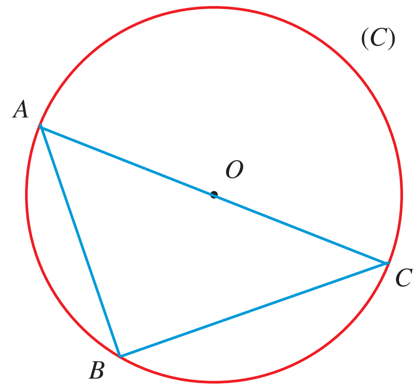


Le triangle ABC ci-contre est rectangle en A; il est donc inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$.

Propriété 2

Tout triangle inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés, est un triangle rectangle d'hypoténuse ce diamètre.

Le triangle ABC ci-contre est inscrit dans le cercle de diamètre $[AC]$ qui est un côté de ce triangle; ABC est donc rectangle en B.



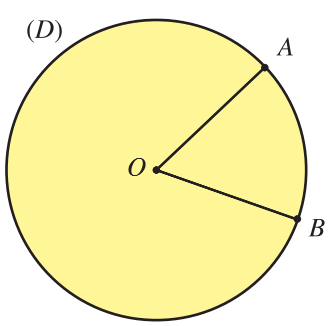
Application 3

«Quatre points sont dits cocycliques s'ils se trouvent sur un même cercle».

Démontre que les quatre sommets d'un rectangle $ABCD$ sont cocycliques; indique le centre du cercle sur lequel ils se trouvent.

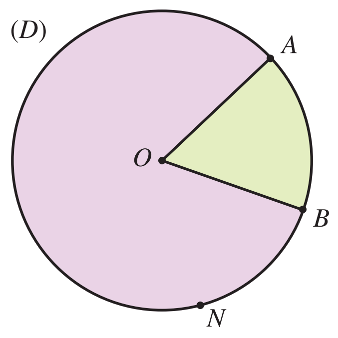
9 SECTEUR CIRCULAIRE

1°) Définition d'un secteur circulaire

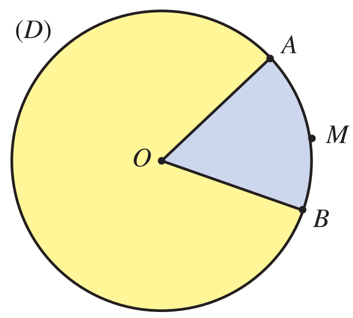


Soit (D) un disque limité par un cercle (C) de centre O et de rayon R.

On appelle **secteur circulaire** l'une ou l'autre des deux parties de (D), limitée par un arc de (C) et les rayons aboutissant aux extrémités de cet arc.

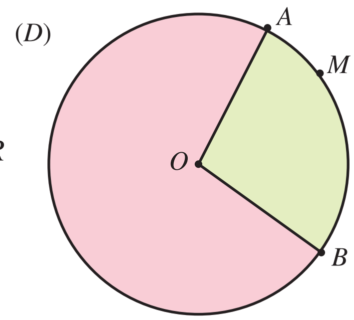


Le secteur circulaire $OANB$.



Le secteur circulaire $OAMB$.

2°) L'aire d'un secteur circulaire



Soit (D) le disque limité par le cercle (C) de centre O et de rayon R et soit A et B deux points de (C).

On se propose de calculer l'aire du secteur circulaire $OAMB$.

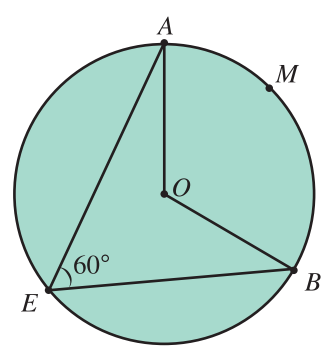
Si α est la mesure en degrés de l'angle au centre $\widehat{AOB}$, alors α est aussi la mesure de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

mesure de (C)		aire de (D)
à **360°**	on fait correspondre	$\boldsymbol{\pi \times R^2}$
à $\boldsymbol{\alpha}$	on fait correspondre	$\boldsymbol{x}$
mesure de $\overset{\frown}{AB}$		aire du secteur circulaire $OAMB$

d'où : $x = \dfrac{\pi \times R^2 \times \alpha}{360°}$

Application 4

Calcule, dans la figure suivante, l'aire du secteur circulaire $OAMB$.

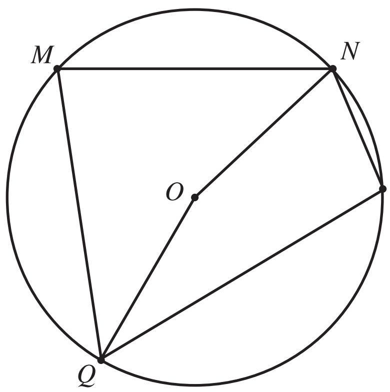


Exercices et problèmes

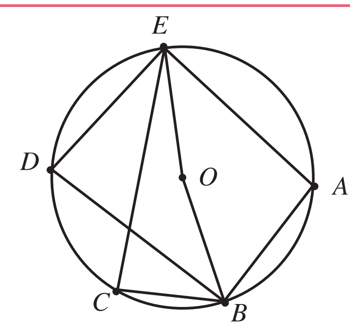
Pour tester les connaissances

1 Nomme les angles qui interceptent le même arc.

1°)



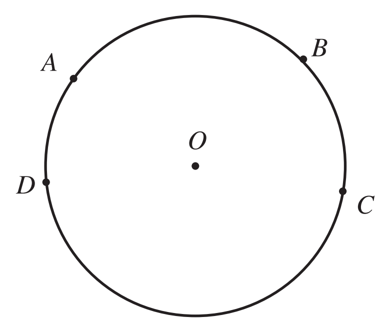
2°)



2 Dans la figure ci-contre, on a :

$\overset{\frown}{AB} = 100°$, $\overset{\frown}{BC} = 55°$ et $\overset{\frown}{DB} = 140°$.

Trouve : $\overset{\frown}{AD}$; $\overset{\frown}{AC}$; $\overset{\frown}{CD}$ et $\widehat{CAD}$.



3 Comment se nomme :

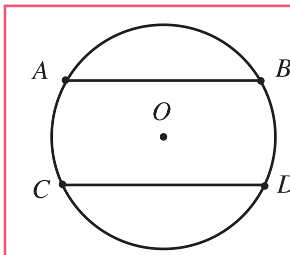
1°) un segment qui joint deux points d'un cercle ?
2°) une droite qui n'a qu'un seul point commun avec le cercle ?
3°) une corde qui passe par le centre du cercle ?
4°) une portion d'un cercle limitée par deux points du cercle ?
5°) une droite qui coupe le cercle en deux points ?

4 Dans le cercle ci-contre, on a :

$(AB) // (CD)$, $\overset{\frown}{AC} = 55°$ et $\overset{\frown}{AB} = 105°$.

Quelle est la mesure de :

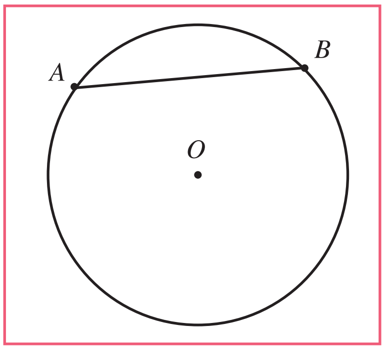
$\overset{\frown}{BD}$; $\overset{\frown}{AD}$; $\overset{\frown}{CAD}$ et $\overset{\frown}{CD}$?



5 **1°)** Dans le cercle de centre O donné, trace la médiatrice de la corde $[AB]$, qui coupe le cercle aux points X et Y (le point X est sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$).

2°) Comment se nomme le segment $[XY]$?

3°) Si $\overset{\frown}{AB} = 80°$, trouve : $\overset{\frown}{AX}$; $\overset{\frown}{XY}$ et $\overset{\frown}{BY}$.



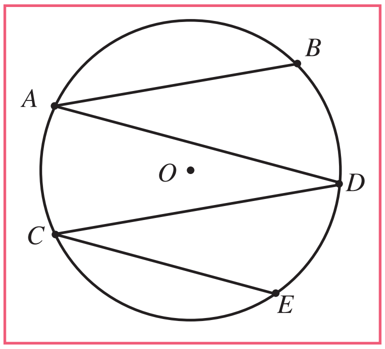
6 Dans le cercle ci-contre, on a :

$(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (CE)$.

Sachant que $\overset{\frown}{AC} = 50°$ et $\overset{\frown}{CE} = 100°$,

trouve :

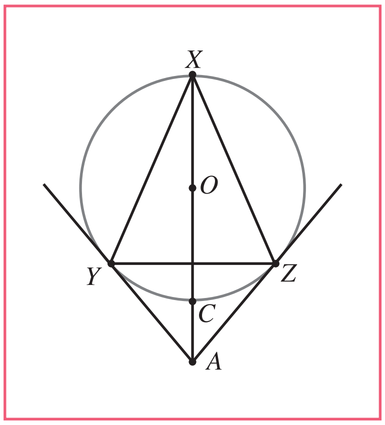
$\overset{\frown}{BD}$; $\overset{\frown}{DE}$ et $\overset{\frown}{AB}$.



7 Soit le triangle XYZ inscrit dans le cercle de centre O.
On a: $\widehat{XYZ} = \widehat{XZY} = 70°$,

$[XC]$ un diamètre du cercle, (AY) et (AZ) deux tangentes.

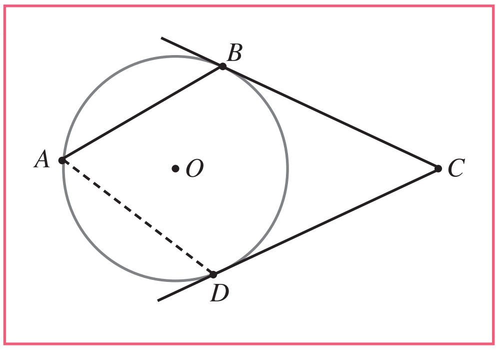
Trouve : $\widehat{YXZ}$; $\overset{\frown}{YZ}$; $\overset{\frown}{YX}$; $\overset{\frown}{YXZ}$; $\overset{\frown}{CZ}$; $\widehat{YAZ}$.



8 $\widehat{BCD}$ est un angle extérieur au cercle de centre O, formé par deux tangentes.

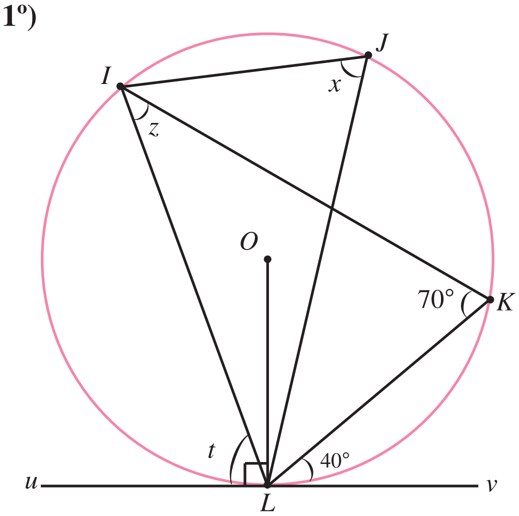
Si $\overset{\frown}{AB} = 110°$ et $\overset{\frown}{BD} = 135°$, détermine :

$\overset{\frown}{AD}$; $\widehat{ABC}$; $\widehat{DCB}$ et $\widehat{BAD}$.

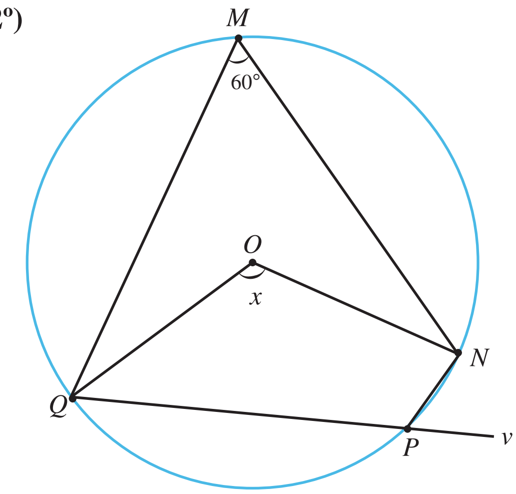


9 Calcule les angles x, y, z et t.

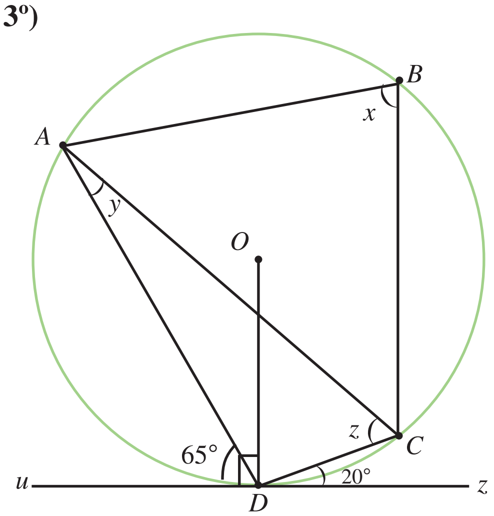
1º)



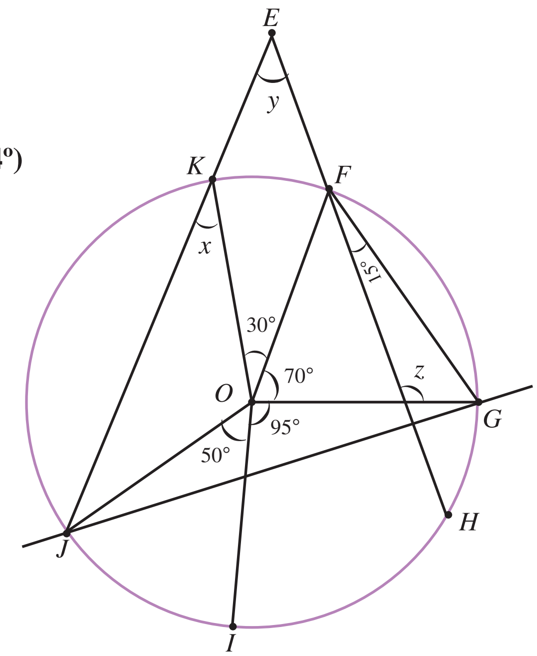
2º)



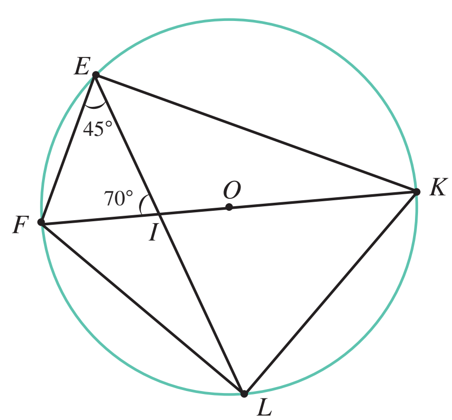
3º)



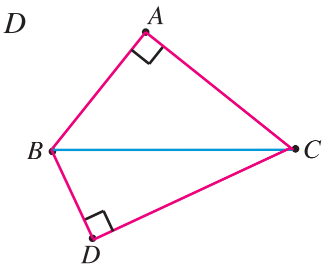
4º)



10 Observe la figure et calcule les angles du quadrilatère $EFLK$.



11 Observe la figure et démontre que les quatre points A, B, C et D sont cocycliques.



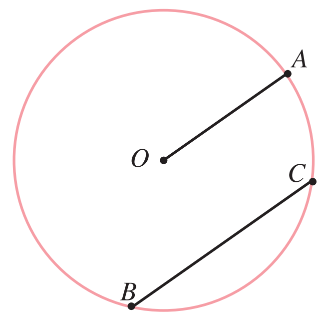
12 ABC est un triangle inscrit dans un cercle. Soit D le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$. La parallèle menée de D à (AB), coupe (BC) en I et l'arc intercepté par $\widehat{BAC}$ en E.

1º) Compare les arcs $\overset{\frown}{BE}$ et $\overset{\frown}{DC}$.

2º) Montre que : $IB = ID$ et $IE = IC$.

13 Soit $[OA]$ un rayon d'un cercle de centre O et soit $[BC]$ une corde parallèle à (OA).

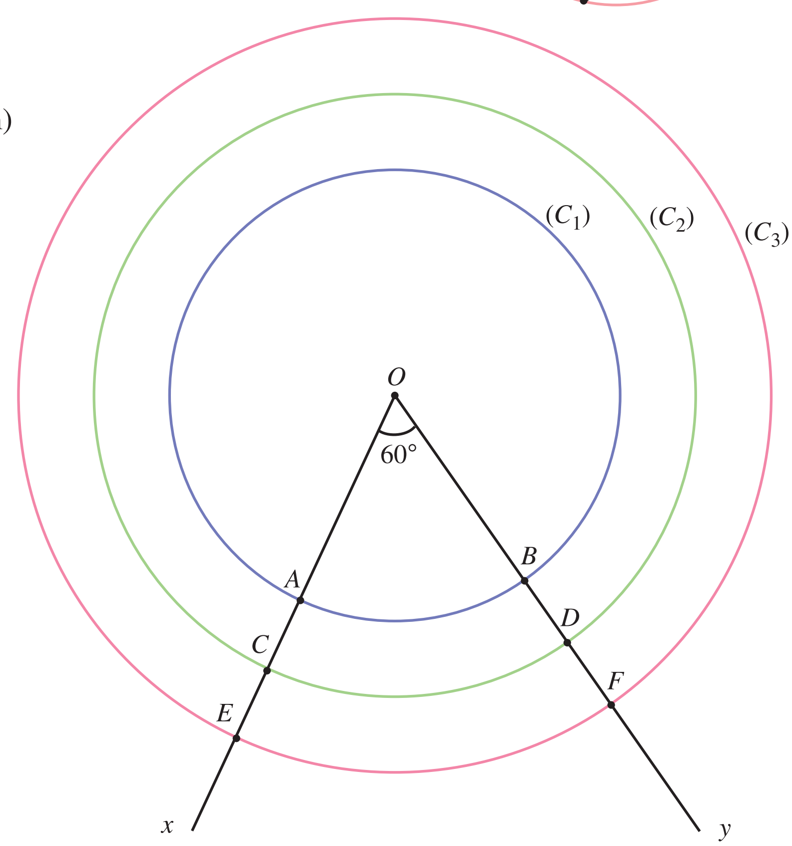
Démontre que la différence des mesures des angles en $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ABC est $90°$.



14 $\widehat{xOy} = 60°$.

C_1 $(O, 3\text{ cm})$, C_2 $(O, 4\text{ cm})$ et C_3 $(O, 5\text{ cm})$ coupent, respectivement, $[Ox)$, $[Oy)$ en A et B, C et D, E et F (voir figure).

Calcule la mesure et la longueur de chacun des arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ et $\overset{\frown}{EF}$.



15 (C) est un cercle de centre O et de rayon 8 cm. A et B sont deux points de (C) tels que $\widehat{AOB} = 60°$. La bissectrice de $\widehat{AOB}$ coupe (C) en K et L (K entre A et B).

1°) Calcule la longueur de (C).

2°) Calcule la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

3°) Calcule l'aire du disque limité par (C).

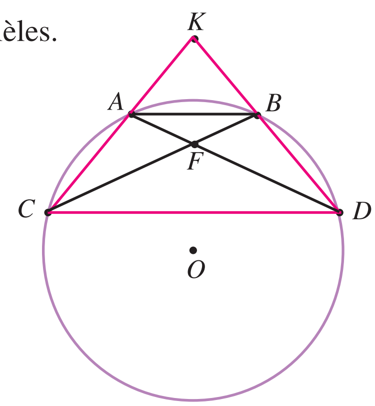
4°) Calcule l'aire du secteur circulaire $OAKB$.

5°) Calcule les angles $\widehat{ALB}$ et $\widehat{AKB}$.

16 Dans la figure suivante, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1°) Démontre que le triangle AFB est isocèle.

2°) Démontre que le triangle KCD est isocèle.



17 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle (C) de centre O et de rayon r. Les supports des segments-hauteurs $[AH]$ et $[BK]$ recoupent le cercle en D et E respectivement.

Montre que C est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{DE}$.

18 **1°)** Place sur un cercle (C) de centre O et de rayon r, les points $E, F, G, H,$ dans cet ordre, tels que : $\widehat{EOF} = 70°$, $\widehat{FOG} = 50°$, $\widehat{GOH} = 70°$.

2°) Calcule les angles du quadrilatère $EFGH$.

3°) Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$? Justifie.

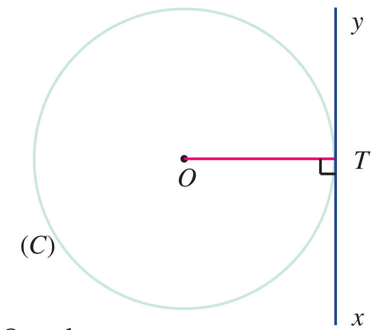
19 (C) est un cercle de centre O et de rayon r; A est un point à l'extérieur de (C). Deux sécantes passant par A coupent (C) respectivement en B et E, et en C et D.
Montre que si B est entre A et E, et C entre A et D, alors :

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{DOE} - \widehat{COB}\right).$$

20 (xy) est une tangente en T à un cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm. B et C sont deux points de (C) tels que $\widehat{xTB} = 55°$ et $\widehat{yTC} = 70°$.

1°) Quelle est la nature du triangle TBC ? justifie.

2°) Calcule l'aire du petit secteur circulaire COT .



21 $[AB]$ et $[AC]$ sont deux cordes isométriques d'un cercle (C) de centre O et de rayon r.

1°) Démontre que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.

2°) Une droite (xy) passant par A recoupe (C) en I et rencontre (BC) en J (J n'est pas un point du segment $[BC]$).

Démontre que $\widehat{ABI} = \widehat{AJB}$.

3°) On suppose que $\widehat{BAC} = 80°$; calcule $\overset{\frown}{AB}$.

22 Réponds par vrai ou faux.

1°) Dans un cercle, si deux angles au centre sont égaux, alors ils sous-tendent deux arcs de même mesure.

2°) Dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors le premier égale deux fois le second.

3°) La mesure de n'importe quel cercle est de 360°.

4°) Si A, B, C, D sont quatre points tels que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90°$, alors ils se trouvent sur le cercle de diamètre $[BC]$.

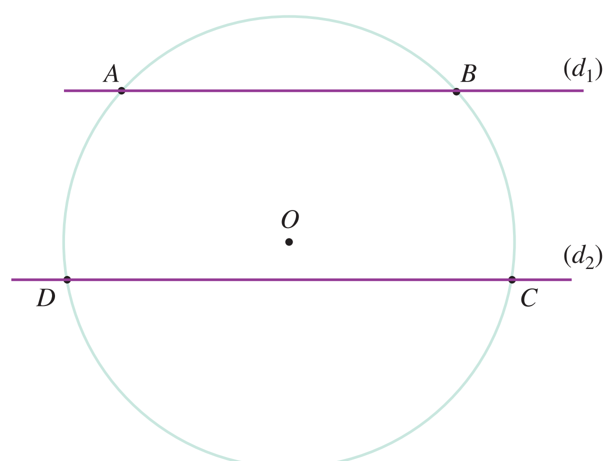
5°) Dans un cercle, deux arcs de même longueur ont la même mesure en degrés.

Pour chercher

23 (C) est un cercle de centre O et de rayon r. (d_1) et (d_2) sont deux droites parallèles qui coupent (C) en A, B, C et D.

1°) Montre que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

2°) Calcule l'aire de $ABCD$ sachant que $AB = 4$ cm, $CD = 10$ cm et la distance entre (d_1) et (d_2) égale 3 cm.

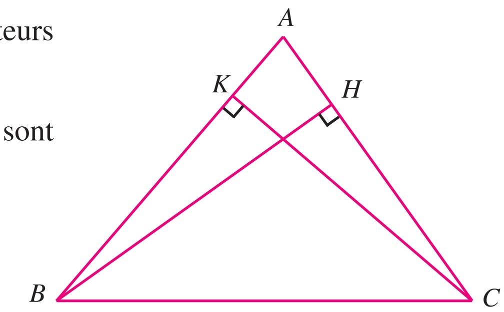


24 (C) est un cercle de centre O. (xy) est une droite tangente en E à (C). F et G sont deux points de (C) tels que $[EF)$ est bissectrice de $\widehat{AEG}$ $\left(A \text{ étant un point de } (xy)\right)$.

Démontre que le triangle EFG est isocèle.

25 ABC est un triangle. H et K sont les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement.

Démontre que les quatre points K, H, B et C sont cocycliques.



26 Soient deux cercles $C\,(O\ ,\ r)$ et $C'\ (O'\ ,\ r)$ sécants en A et B. (AO) recoupe (C) en M et (BO') recoupe (C') en M' .
Quelle est la nature du quadrilatère $AM'BM$? Justifie.

27 Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC, ayant ses trois angles aigus, inscrit dans un cercle (C) de centre O et de rayon r. Le support de $[AH]$ recoupe le cercle (C) en K.

1°) Montre que $\widehat{CAH} = \widehat{CBK}$.

2°) Déduis que $\widehat{CBH} = \widehat{CBK}$ et que K est le symétrique de H par rapport à (BC).

28 (C) est un demi-cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon r.
(xy) est tangente à (C) en E.

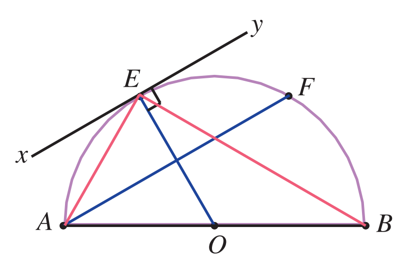
(xy) // (AF) et $\widehat{BAF} = 30°$.

1°) Calcule $\widehat{AEx}$ et $\widehat{BEy}$.

2°) Démontre que le triangle AEB est rectangle.

3°) Calcule les côtés du triangle AEB lorsque $r = 3$ cm.

4°) Calcule l'aire du secteur circulaire $OEFB$.



29 ABC est un triangle équilatéral et O le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Soit M un point quelconque de l'arc intercepté par l'angle de sommet A.

1°) Calcule $\widehat{BMA}$ et $\widehat{CMA}$. Que représente $[MA)$ pour l'angle $\widehat{BMC}$?

2°) Une demi-droite $[Bz)$ coupe $[AM]$ en D tel que $\widehat{DBM} = 60°$.

a) Quelle est la nature du triangle BMD ?

b) Démontre que les triangles BDA et BMC sont superposables.

3°) Démontre que $MA = MB + MC$.

30 $C\ (O\ ,\ r)$ et $C'\ (O'\ ,\ r)$ sont deux cercles tangents extérieurement en A. (TT') est une tangente commune à (C) et (C') (voir figure).

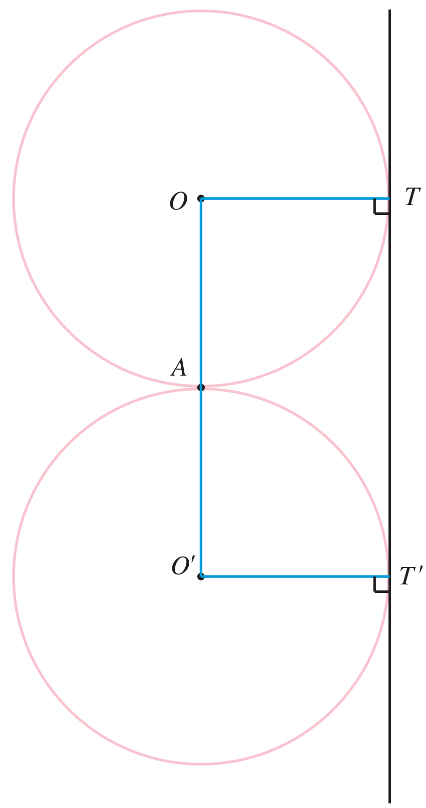
La perpendiculaire en A à (OO') coupe (TT') en H.

1º) Démontre que le quadrilatère $OTT'O'$ est un rectangle.

2º) Quelle est la nature du quadrilatère $OTHA$? Justifie.

3º) Démontre que les sommets de $OTT'O'$ se trouvent sur un cercle (C_1) dont on demande d'exprimer le rayon à l'aide de r.

4º) Démontre que le triangle ATT' est rectangle en A.



31 (C) est un cercle de centre O. $[AD]$ est une corde de (C). La demi-droite $[ON)$ perpendiculaire à (AD) coupe le cercle en B $\big(N$ est un point de $[AD]\big)$. M est le projeté orthogonal de O sur (AB) et I l'intersection de (OM) et (AD).

1º) Montre que (BI) est perpendiculaire à (OA).

2º) (BI) recoupe le cercle en B' ; montre que $AB' = AB$.

3º) Compare les triangles ADB et $AB'B$.

4º) Compare les triangles AIB' et BID.

5º) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDB'$? Justifie.

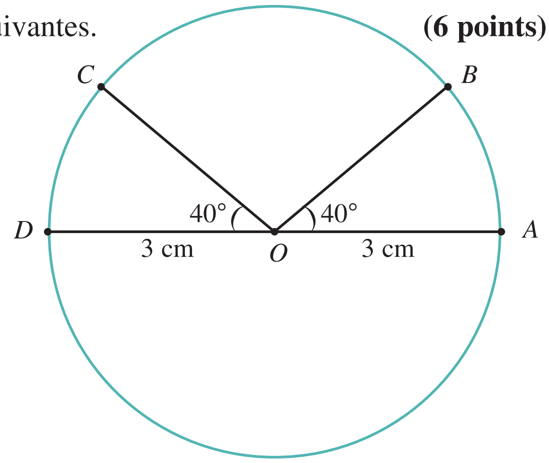
32 Deux cercles (C) et (C'), de centres respectifs O et O', se coupent en A et B. Soit C et D les points diamétralement opposés à B, sur les cercles (C) et (C'), respectivement.

1º) Montre que les points C, A et D sont alignés.

2º) Compare OO' et CD.

TEST

1 Observe la figure et réponds aux questions suivantes. **(6 points)**



1°) Calcule l'angle $\widehat{BOC}$.

2°) Montre que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

3°) Trouve la mesure de l'arc $\overset{\curvearrowright}{BC}$.

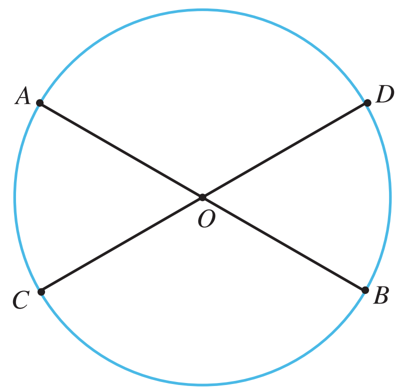
4°) Calcule la longueur de l'arc $\overset{\curvearrowright}{AC}$.

5°) Calcule l'aire du secteur circulaire $OABC$

6°) Montre que les arcs $\overset{\curvearrowright}{AC}$ et $\overset{\curvearrowright}{BD}$ ont même mesure.

2 $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres d'un cercle (C).

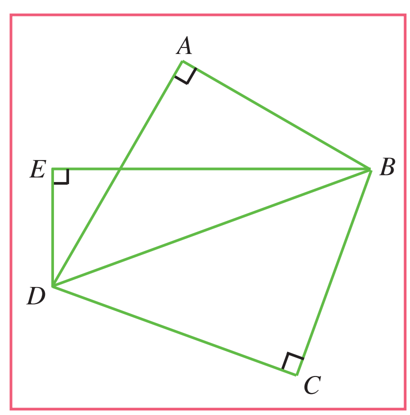
Démontre que $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$. **(2 points)**



3 $C\,(O\,,\,r)$ et $C'\,(O'\,,\,r)$ sont deux cercles sécants en A et B.
Une droite passant par B les recoupe en E et F respectivement.
1°) Quelle est la nature du quadrilatère $AO'BO$? Justifie. **(2 points)**
2°) Montre que le triangle AEF est isocèle. **(2 points)**

4 Montre que, dans la figure suivante, les points A, B, C, D et E se trouvent sur un même cercle (C). **(3 points)**

Indique le centre et le rayon de (C).



5 (C) est un cercle de centre O et de diamètre $[BF]$.
Soit A un point de (C) ($\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AF}$).
La tangente à (C) en F coupe (BA) en E.

1°) Montre que $\widehat{FEA} = \widehat{AFB}$. **(3 points)**

2°) On suppose $\overset{\frown}{AB} = 30°$; calcule $\widehat{BEF}$ et $\widehat{AFE}$. **(2 points)**

20 STATISTIQUE

Objectif

Représenter les données groupées à l'aide du polygone des fréquences.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Rappel du vocabulaire statistique

2. Effectif cumulé

3. Fréquence cumulée

4. Représentation graphique et diagramme circulaire

5. Exercice commenté

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 RAPPEL DU VOCABULAIRE STATISTIQUE

Activité

Voici les notes sur 20 obtenues par les 36 élèves d'une classe :

12	8	12	15	15	8	6	13	14
6	11	10	13	12	17	6	15	13
12	10	8	5	15	14	13	12	11
10	12	14	6	8	10	11	13	12

1º) Complète le tableau suivant.

Note	5	6	8	10	11	12	13	14	15	17	
Effectif	1				3	7					Total 36

2º) a) Combien d'élèves ont eu la note 6 ? 11 ? 15 ?

b) Que représente le nombre 7 dans ce tableau ?

c) Combien d'élèves ont eu plus que 12 ? Moins que 10 ?

d) Combien d'élèves ont eu 13 et moins ? 14 et plus ?

e) Combien d'élèves ont eu au plus 8 ? Au moins 11 ?

f) Combien d'élèves ont eu la moyenne 10 ?

3º) La fréquence relative à la note 11 est : $\frac{3}{36} = 0{,}0833$ ou $8{,}33\%$.

8,33 est la fréquence en pourcentage de la note 11.

Complète alors le tableau suivant.

Note	5	6	8	10	11	12	13	14	15	17	
Fréquence en pourcentage					8,33						Total 100

a) Quelle est la fréquence, en pourcentage, des notes inférieures à 8 ? à 13 ?

b) Quel est le pourcentage des élèves qui ont eu la moyenne 10 ?

⊙ L'ensemble, sur lequel porte une étude statistique, est appelé **population**.

⊙ Chaque élément de la population est appelé **individu**.

⊙ Le phénomène étudié sur une population est appelé **caractère**. Ce caractère peut être **quantitatif** (mesurable) ou **qualitatif**.

⊙ Le nombre des individus d'une population est appelé **effectif total**.

⊙ Le nombre des individus qui vérifient une valeur d'un certain caractère est **l'effectif** de cette valeur.

⊙ Le rapport $\dfrac{\textbf{effectif d'une valeur}}{\textbf{effectif total}}$ est la **fréquence** de cette valeur.

⊙ La fréquence est un nombre compris entre 0 et 1.

⊙ La somme des fréquences est égale à 1.

⊙ La fréquence peut être exprimée en pourcentage en la multipliant par 100.

⊙ Les valeurs prises par le caractère sont placées par ordre croissant.

2 EFFECTIF CUMULÉ

On considère un caractère quantitatif.

L'effectif cumulé correspondant à une valeur x du caractère est **le nombre des individus dont la valeur du caractère est inférieure ou égale à x.**

Dans l'activité 1, l'effectif cumulé de la valeur 11 est : $1 + 4 + 4 + 4 + 3 = 16$.

3 FRÉQUENCE CUMULÉE

La fréquence cumulée correspondant à une valeur x du caractère est **la somme des fréquences dont la valeur du caractère est inférieure ou égale à x.**

Cette fréquence cumulée est aussi le rapport de l'effectif cumulé à l'effectif total. Cette fréquence peut être exprimée en pourcentage en la multipliant par 100.

Dans l'activité 1, la fréquence cumulée de la valeur 11 est : $\dfrac{16}{36} = 0{,}4444$; soit 44,44 %.

4 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE ET DIAGRAMME CIRCULAIRE

EXEMPLE

On évalue la répartition des vacanciers, au Liban, selon le mode d'hébergement suivant :

résidence de parents ou d'amis	45 % ,
location	25 % ,
hôtel	30 % .

On va représenter cette répartition par un **diagramme circulaire**.

Pour cela :

⊙ on partage un disque en secteurs dont les angles sont proportionnels aux pourcentages.

360° correspond à 100%.

Le coefficient de proportionnalité est donc :

$$K = \frac{360}{100} = 3{,}6 .$$

⊙ on peut aussi partager le disque en secteurs dont les angles sont proportionnels aux effectifs.

360° correspond à l'effectif total.

Le coefficient de proportionnalité est donc :

$$K = \frac{360}{\text{effectif total}} .$$

⊙ chaque secteur est défini par un angle dont le sommet est le centre du disque.

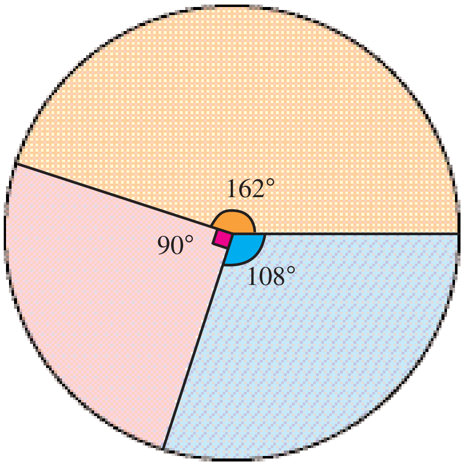
⊙ on trace les angles à l'aide d'un rapporteur.

La répartition des vacanciers est résumée dans le tableau suivant :

Mode d'hébergement	Parents ou amis	Location	Hôtel	Total
Pourcentage	45	25	30	100
Angle en degrés	162	90	108	360

K=3,6

Le coefficient de proportionnalité est $K = \frac{360}{100} = 3{,}6$.



L'angle correspondant à :

⊙ 45 % est $45 \times 3{,}6 = 162°$,

⊙ 25 % est $25 \times 3{,}6 = 90°$,

⊙ 30 % est $30 \times 3{,}6 = 108°$.

5 EXERCICE COMMENTÉ

Enoncé

Un sondage mené auprès des élèves de deux classes sur le nombre de livres lus, durant les vacances d'été, a donné les résultats suivants :

25 élèves ont lu 2 livres,	**15 élèves ont lu 3 livres,**
8 élèves ont lu 4 livres,	**2 élèves ont lu 5 livres.**

1°) Quelle est la population étudiée ? Quel est l'individu ?

2°) Quel est le caractère étudié ? Est-il qualitatif ou quantitatif ?

3°) Quel est l'effectif total des élèves ?

4°) a) Dresse le tableau des effectifs et des effectifs cumulés.

b) Quel est le nombre des élèves qui ont lu 3 livres au plus ? 4 livres et plus ?

5°) a) Dresse le tableau des fréquences, des fréquences en pourcentage et des fréquences cumulées en pourcentage.

b) Quel est le pourcentage des élèves qui ont lu 3 livres au moins ? 4 livres et plus ?

6°) Représente le sondage précédent par un diagramme circulaire.

Solution

1°) La population étudiée est l'ensemble des élèves des deux classes. L'individu est : chaque élève de ces deux classes.

2°) Le caractère étudié est : le nombre de livres lus durant l'été. Ce caractère est quantitatif.

3°) L'effectif total des élèves est : $25 + 15 + 8 + 2 = 50$ élèves.

4°) a)

Nombre de livres lus	2	3	4	5	Total
Effectif	25	15	8	2	50
Effectif cumulé	25	40	48	50	

$40 = 25 + 15$

b) Le nombre des élèves qui ont lu 3 livres au plus est : 40.

Le nombre des élèves qui ont lu 4 livres et plus est : $8 + 2 = 10$.

5°) a) Pour calculer la fréquence relative à une valeur, on fait le rapport de l'effectif de cette valeur à l'effectif total.

Par exemple, la fréquence relative à la valeur 3 est :

$\frac{15}{50} = 0{,}3$ ou $0{,}3 \times 100 = 30\ \%$.

Nombre de livres lus	2	3	4	5	Total
Fréquence	0,5	0,3	0,16	0,04	1
Fréquence en %	50	30	16	4	100
Fréquence cumulée en %	50	80	96	100	

$50 + 30 = 80$

b) D'après le tableau précédent, il y a 80% des élèves qui ont lu au plus 3 livres.

On peut retrouver ce pourcentage, en multipliant par 100, le rapport de l'effectif cumulé relatif à la valeur 3 à l'effectif total :

$$\frac{40}{50} \times 100 = 80\ \%.$$

Le pourcentage des élèves qui ont lu 4 livres et plus est :

$16 + 4 = 20$; soit 20 %.

6°) Pour représenter ce sondage par un diagramme circulaire, on partage le disque en quatre secteurs.

Chaque secteur est défini par un angle dont le sommet est le centre du disque et qui est proportionnel à l'effectif correspondant. Le coefficient de proportionnalité est : $K = \dfrac{360}{\text{effectif total}} = \dfrac{360}{50} = 7{,}2$.

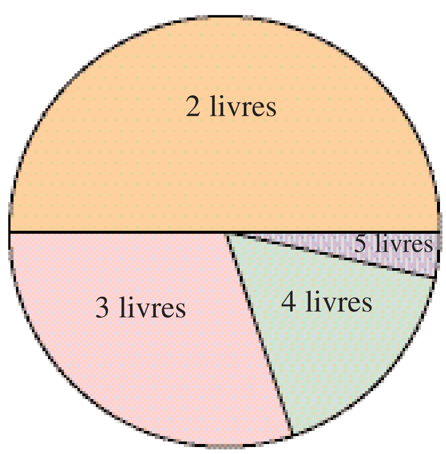
Par exemple, l'angle correspondant à 3 livres est :

$15 \times 7{,}2 = 108°$.

Le tableau suivant donne les angles des différents secteurs.

Nombre de livres lus	2	3	4	5	Total
Effectif	25	15	8	2	50
Angle en degrés	180	108	57,6	14,4	360

$K=7{,}2$



Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Réponds par vrai ou faux.

Le tableau suivant représente le nombre des enfants des familles d'un immeuble.

Nombre des enfants	0	1	2	3	4
Effectif (Nombre de familles)	2	5	8	4	1
Effectif cumulé	2	7	15	19	20

1º) La population étudiée est l'ensemble des familles de l'immeuble.

2º) Le caractère étudié est qualitatif.

3º) L'effectif total est 20.

4º) Il y a 15 familles qui ont au moins 2 enfants.

5º) 19 est l'effectif cumulé de la valeur 4.

6º) La fréquence relative à la valeur 2 est 0,4 ou 40%.

7º) Il ya 95% des familles qui ont au moins 3 enfants.

8º) Dans un diagramme circulaire :

a) le disque est partagé en 5 secteurs.

b) le coefficient de proportionnalité est $K = \frac{360}{20} = 18$.

c) l'angle du secteur correspondant à la valeur 1 est 80°.

2 La production mondiale de pétrole se répartit de la façon suivante : 25% pour les Etats-Unis (U.S.A), 30% pour les pays du Moyen-Orient (M.O) et 45% pour les autres pays.

1º) Complète le tableau suivant.

Zone de population	U.S.A	M.O	Autres	Total
Pourcentage	25			100
Angle en degrés	90			360

$K=$...........

2º) Représente cette production mondiale par un diagramme circulaire.

3 La population étudiée est l'ensemble des 30 élèves d'une classe. Le caractère étudié est le nombre de frères et sœurs.

1º) Complète le tableau suivant, puis fais un diagramme circulaire.

Valeur	0	1	2	3	4 et plus	Total
Effectif	8	12	5	3	2	
Fréquence (%)						100
Angle en degrés						360

2º) Quel est le nombre des élèves qui ont au plus 2 «frères ou sœurs» ? Quel pourcentage de la classe représente-t-il ?

4 Un sondage mené auprès des élèves de toutes les classes d'un cycle d'un collège, sur la couleur de leurs yeux, a donné les résultats suivants :

25 élèves ont les yeux bleus,
20 élèves ont les yeux verts,
75 élèves ont les yeux noirs,
100 élèves ont les yeux marrons.

1º) Quelle est la population étudiée ?

2º) Quel est le caractère étudié ? Est-il qualitatif ou quantitatif ?

3º) Quel est l'effectif total des élèves ?

4º) Complète le tableau suivant, puis représente cette répartition par un diagramme circulaire.

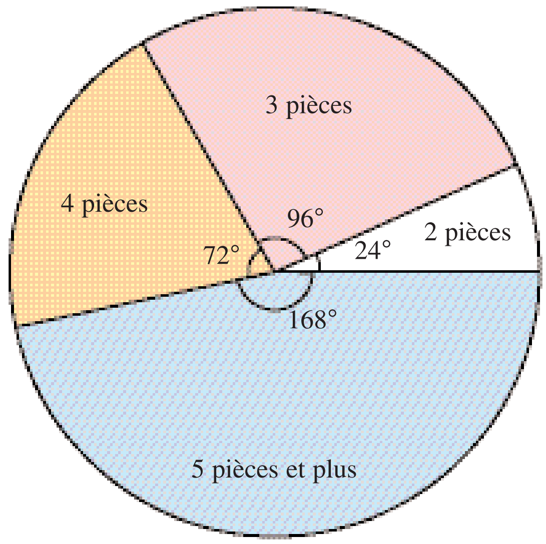
Couleur des yeux	Bleus	Verts	Noirs	Marrons	Total
Effectif	25	20	75	100	220
Angle en degrés					360

5º) Reproduis le tableau précédent, en remplaçant la ligne des angles par les fréquences.

5 Le diagramme circulaire ci-contre donne les résultats d'une enquête statistique portant sur 60 maisons d'un quartier.

Le caractère étudié est le nombre de pièces principales.

Dresse le tableau donnant les effectifs, les effectifs cumulés, les fréquences et les fréquences cumulées des valeurs du caractère étudié.



6 Les résultats de l'élection des délégués d'une classe où tous les élèves ont voté, sont résumés dans le tableau suivant.

Nom du candidat	Ziad	Walid	Karim
Nombre de voix	15	6	3

1°) Dresse le tableau indiquant le pourcentage des voix obtenues par chaque candidat.

2°) Représente la répartition des voix par un diagramme circulaire.

7 Tous les élèves d'un cycle d'un collège choisissent une activité :

110 le sport, 80 le dessin et 50 la musique.

Représente la répartition des élèves de ce cycle par un diagramme circulaire, selon l'activité pratiquée.

8 **«Je suis bon enfant jusqu'à un certain degré».**

1º) Compte le nombre total de lettres dans cette phrase de Gustave Flaubert.

2º) Dresse un tableau indiquant le nombre d'apparitions de chacune de ces lettres et son pourcentage.

3º) Quel est le pourcentage des voyelles ?

4º) **a)** Quelle voyelle a la plus grande fréquence ?
b) Quelle consonne a la plus grande fréquence ?

Pour chercher

9 Les notes des élèves d'une classe sur un devoir de mathématiques sont réparties de la façon suivante :

5% ont eu 18 , 20% ont eu 15 , 25% ont eu 12 , 37,5% ont eu 10 et 12,5% ont eu 7.

1º) Dresse le tableau des fréquences cumulées en pourcentage.

2º) Quel est le pourcentage des élèves qui ont eu 10 et plus ?

3º) Représente cette répartition par un diagramme circulaire.

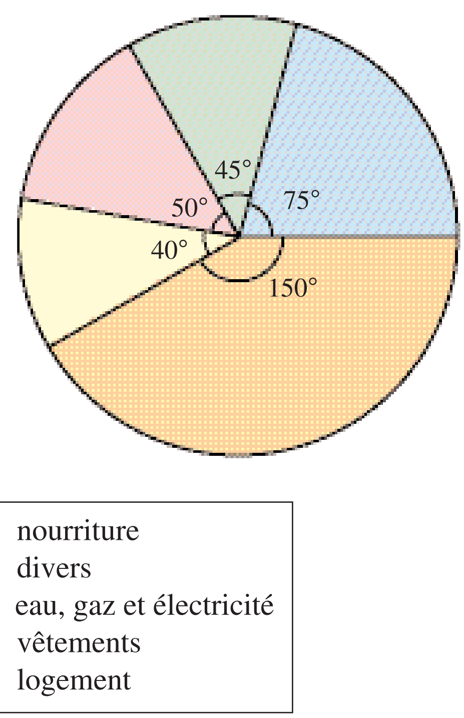
10 Le diagramme ci-contre indique la répartition des dépenses d'un père de famille.

1º) Traduis, en pourcentage, cette répartition, dans un tableau.

2º) Sachant que ce père de famille gagne 750 000 L.L. par mois, calcule la somme consacrée à chaque part de cette répartition.

3º) Un autre père de famille gagne 900 000 L.L. par mois. Il consacre 400 000 L.L. à la nourriture,
180 000 L.L. au logement,
100 000 L.L. aux vêtements,
120 000 L.L. au «gaz - électricité - eau» et le reste en frais divers.

Traduis ces données par un diagramme circulaire.



11 Dans une librairie, on a remarqué que 20% des livres traitent des textes religieux, 30% littéraires, 45% scientifiques et 5% d'autres sujets.

1º) Quelle est la population étudiée ? Quel est le caractère ? Est-il qualitatif ou quantitatif ?

2º) Représente cette répartition par un diagramme circulaire.

12 Un cocktail de jus de fruits est composé de :

1 volume de sirop de canne,

3 volumes de jus de citron,

6 volumes de jus d'orange.

1º) Quelle est la quantité en cl d'un volume du composant dans 100 cl de boisson ?

2º) Complète le tableau ci-dessous qui indique la quantité en cl de chacun des composants dans un litre (100 cl) de ce boisson.

Composant	Sirop	Citron	Orange	Total
Nombre de volumes	1	3	6	10
Quantité en cl				100

3º) Représente cette composition par un diagramme circulaire.

TEST

1 On lance 30 fois un dé dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Le tableau suivant indique le nombre d'apparitions de chaque face.

Numéro de la face	1	2	3	4	5	6
Effectif	3	6	8	2	7	4

Réponds par vrai ou faux.

1º) La valeur 5 est la plus fréquente.

2º) La fréquence de la valeur 2 est $\frac{1}{5}$ ou 20%.

3º) 4 est la fréquence de la valeur 6.

4º) La fréquence d'apparition d'un nombre pair est : $\frac{6+2+4}{30} = \frac{2}{5}$ ou 40%.

5º) La fréquence d'apparition d'un nombre impair est 50%.

6º) Dans un diagramme circulaire, l'angle correspondant à la valeur 2 est 20°.

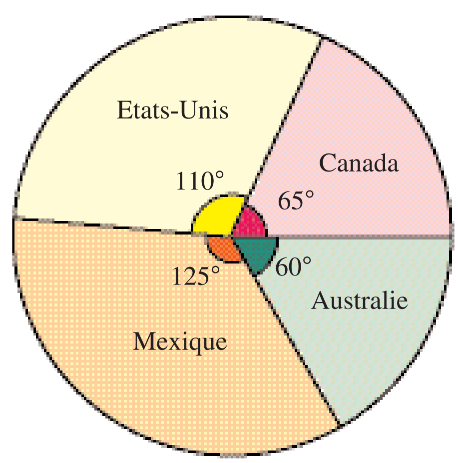
(6 points)

2 La production d'argent en 1993 est de 7200 tonnes dans les 4 pays suivants : Canada, Etats-Unis, Mexique et Australie.

La répartition de cette production est représentée par le diagramme circulaire ci-contre.

Dresse un tableau représentant la production, en tonnes, de chaque pays et le pourcentage de cette production.

(6 points)



3 Les 3000 élèves d'une école sont répartis de la manière suivante : 1020 élèves en maternelle, 30% en primaire, 22% en complémentaire et le reste en secondaire.

1º) Trouve le nombre des élèves dans le secondaire. **(2 points)**

2º) Complète le tableau suivant :

Niveau	Maternelle	Primaire	Complémentaire	Secondaire
Effectif	1020			
Effectifs cumulés				
Fréquence (en %)		30	22	
Fréquences cumulées (en %)				

(4 points)

3º) Représente cette répartition par un diagramme circulaire. **(2 points)**

21 COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT DE DROITE

Objectif

Calculer les coordonnées du milieu d'un segment dans le plan.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Moyenne de plusieurs nombres
2. Abscisse du milieu d'un segment de droite
3. Coordonnées du milieu d'un segment de droite dans un plan rapporté à un repère orthonormal

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 MOYENNE DE PLUSIEURS NOMBRES

Activité

Voici les notes de mathématiques obtenues par Ziad et Walid, durant le premier trimestre :

Devoir nº	1	2	3	4	5
Notes de Ziad	13	10	14	12	6
Notes de Walid	12	9	13	11	14

Le but, dans cette activité, est de savoir lequel de ces deux élèves est le meilleur en mathématiques.

Pour cela, on procède de la manière suivante :

pour Ziad : $\dfrac{13 + 10 + 14 + 12 + 6}{5} = 11$.

Le dénominateur 5 représente le nombre de devoirs.
Le nombre 11 s'appelle la moyenne des notes de Ziad.

Fais de même pour trouver la moyenne des notes de Walid.

Déduis alors le meilleur en mathématiques.

Règle

La moyenne de n nombres est le quotient de leur somme par n .

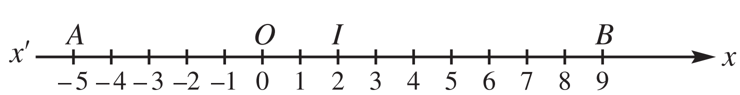
Application 1

Trouve la moyenne des nombres suivants.

1º) 3,7 et 5,3. **2º)** -3 ; 5 et 7. **3º)** 2 ; 3 ; 4 et 11.

2 ABSCISSE DU MILIEU D'UN SEGMENT DE DROITE

A et B sont deux points sur un axe $x'Ox$ d'abscisses respectives $\overline{OA} = x_A$ et $\overline{OB} = x_B$.



L'abscisse du milieu I du segment $[AB]$ est la moyenne des deux nombres x_A et x_B .

Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\overline{OI} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$ ou $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

EXEMPLE

A et B sont deux points d'un axe $x'Ox$ tels que $\overline{OA} = -5$ et $\overline{OB} = +9$.

L'abscisse du milieu I de $[AB]$ est : $\overline{OI} = \dfrac{-5+9}{2} = 2$.

Application 2

1°) Place, sur un axe $x'Ox$, les points A, B et C d'abscisses respectives -3 ; $+5$ et -1.

2°) Calcule les abscisses des points : I milieu de $[AB]$, J milieu de $[AC]$, K milieu de $[BC]$ et L milieu de $[IJ]$.

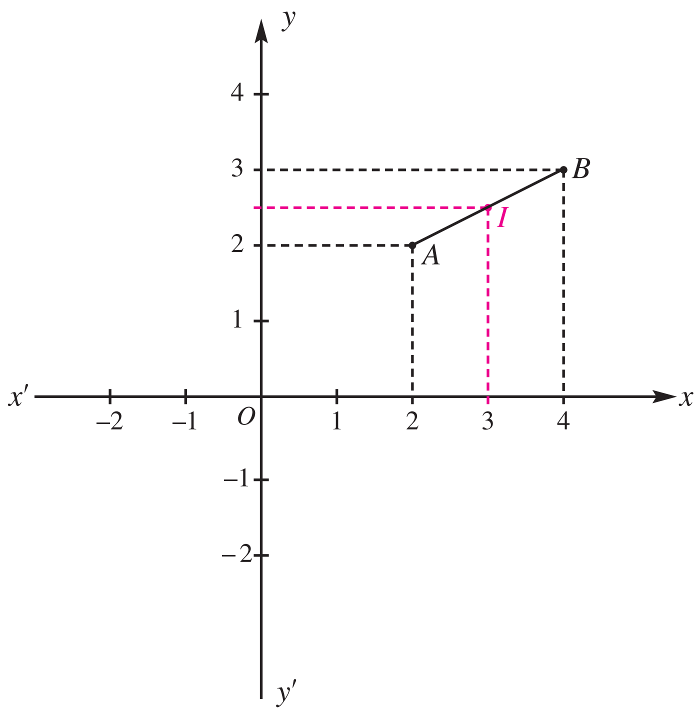
3 COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

A et B sont deux points de ce repère de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$.

La moyenne des deux nombres x_A et x_B est l'abscisse x_I du milieu I de $[AB]$.

La moyenne des deux nombres y_A et y_B est l'ordonnée y_I de I.



Si I est le milieu de $[AB]$, alors : $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

EXEMPLE

A et B sont deux points du repère tels que : A (2 ; 2) et B (4 ; 3).

Si I est le milieu de [AB], alors : $x_I = \dfrac{2+4}{2} = 3$ et $y_I = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$, soit $I\left(3 ; \dfrac{5}{2}\right)$.

Application 3

1°) Dans un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, place les points A (– 2 ; 3), B (3 ; – 1) et C (– 1 ; 4).

2°) Calcule les coordonnées des points : I milieu de [AB], J milieu de [BC] et K milieu de [IJ].

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Réponds par vrai ou faux.

1°) La moyenne des deux nombres 7 et – 5 est 1.

2°) 3 est la moyenne des nombres 2 ; 5 et 3.

3°) 0 est la moyenne des nombres 3 et – 3.

4°) La moyenne de plusieurs nombres est un nombre positif.

5°) A et B sont deux points d'un axe d'abscisses respectives – 3 et 5.
Le point I d'abscisse 2 est le milieu de [AB].

6°) A et B sont deux points d'un axe d'abscisses respectives – 1 et 1.
L'origine O de l'axe est le milieu de [AB].

7°) Soit A (1 ; 0) et B (3 ; 2) deux points d'un repère orthonormal d'origine O.
Le point I (2 ; 2) est le milieu de [AB].

2 Trouve la moyenne des nombres.

1°) – 6 et 4,8. **2°)** – 4 ; – 3 et – 2. **3°)** – 3 ; – 2,1 et 4. **4°)** – 2,1 ; 0 ; 2,5 et 6.

3 Les notes de Sami et Nabil, obtenues sur six devoirs de Français, sont résumées dans le tableau suivant.

Devoir nº	1	2	3	4	5	6
Notes de Sami	10	11	7	9	13	14
Notes de Nabil	11	9	5	8	14	12

1º) Quelle est la moyenne des notes de Sami ? de Nabil ?

2º) Chadi était absent au troisième devoir et a eu les notes suivantes : 10 , 8 , 7 , 13 et 11 sur les autres.

Trouve la moyenne de Chadi et déduis le meilleur des trois élèves.

4 A et B sont deux points d'un axe $x'Ox$. Calcule l'abscisse x du milieu I de $[AB]$, dans chacun des cas suivants.

1º) $A\,(4)$ et $B\,(-2)$.

2º) $A\,(1{,}5)$ et $B\,(-5{,}3)$.

3º) $A\,(-5{,}1)$ et $B\,(-3{,}5)$.

4º) $A\,(2{,}1)$ et $B\,(-6{,}3)$.

5 Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. Calcule les coordonnées du point I, milieu de $[AB]$, dans chacun des cas suivants.

1º) $A\,(2\,;\,5)$ et $B\,(3\,;\,6)$.

2º) $A\,(-1{,}5\,;\,0)$ et $B\,(0\,;\,2{,}5)$.

3º) $A\,(-2{,}1\,;\,3)$ et $B\,(2{,}1\,;\,-3)$.

4º) $A\,(-3\,;\,-4)$ et $B\,(-1{,}5\,;\,-2{,}5)$.

6 Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1º) Place les points $A\ (2\ ;\ 1)$, $B\ (-\ 1\ ;\ 3)$, $C\ (-\ 7\ ;\ 5)$ et $D\ (4\ ;\ 3)$.

2º) Trouve les coordonnées du milieu I de $[AB]$ puis de J milieu de $[CD]$. Place les points I et J dans le repère.

Pour chercher

7 A et B sont deux points d'un axe $x'Ox$. Le point I d'abscisse $-\ 2$ est le milieu du segment $[AB]$.

1º) Calcule l'abscisse du point A, si l'abscisse de B est $-\ 5$.

2º) Calcule l'abscisse du point B, si l'abscisse de A est 3.

8 Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. N est le symétrique de M par rapport à I. Calcule, dans chacun des cas suivants, les coordonnées de N.

1º) $M\ (1\ ;\ 5)$ et $I\ (4\ ;\ 3)$.

2º) $M\ (-\ 3\ ;\ -\ 2{,}4)$ et $I\ (-\ 2\ ;\ 2{,}2)$.

9 Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1º) Place les points $A\ (2\ ;\ 3)$ et $B\ (-\ 1\ ;\ 4)$.

2º) Calcule les coordonnées du point C, symétrique de A par rapport à O. Place le point C dans ce repère.

3º) Place le point $D\ (1\ ;\ -\ 4)$ et calcule les coordonnées du milieu de $[BD]$.

4º) Déduis-en la nature du quadrilatère $ABCD$.

10 **1º)** Trouve les coordonnées du centre I du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\ (-\ 2\ ;\ 4)$ et $B\ (6\ ;\ 6)$, dans un repère orthonormal.

2º) Calcule, de même, les coordonnées du centre J du cercle de diamètre $[AI]$.

3º) Construis les deux cercles ci-dessus.

TEST

1 **1º)** Sur un axe $x'Ox$, place les points A, B, C et D d'abscisses respectives 2 ; 3 ; – 4 et – 1.

2º) Calcule l'abscisse du milieu I de $[AB]$, celle du milieu J de $[CD]$ et celle du milieu K de $[IJ]$. Que remarques-tu ? **(4 points)**

2 Sur un axe $x'Ox$, place les points A, B, C et D d'abscisses respectives – 1,4 ; – 3,2 ; 2,1 et 3,9.

Montre que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. **(3 points)**

3 Dans un repère orthonormal, on donne les points A (2 ; 5) , B (– 2 ; 2) , C (3 ; 1) et D (7 ; 4).

1º) Calcule les coordonnées du point I milieu de $[AC]$ et du point J milieu de $[BD]$. Que remarques-tu ? **(3 points)**

2º) Quelle est alors la nature du quadrilatère $ABCD$? **(2 points)**

4 La moyenne des âges de Fadi, Nabil et Leyla est 15 ans. L'âge de Fadi est 12 ans, celui de Nabil est 17 ans.

Quel est l'âge de Leyla ? **(4 points)**

5 **1º)** Construis, dans un repère orthonormal, le cercle de centre I (1 ; 3) et de rayon 2.

(1 point)

2º) Les points A (1 ; 5) et C (3 ; 3) sont-ils sur ce cercle ? **(1 point)**

3º) Calcule les coordonnées de B diamétralement opposé à A et de D diamétralement opposé à C. **(2 points)**

22 VECTEUR ET TRANSLATION

Objectifs

1. Représenter géométriquement un vecteur.

2. Identifier le vecteur d'une translation.

3. Dessiner la figure translatée d'une figure donnée.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Direction et sens

2. Vecteur

3. Vecteurs égaux

4. Vecteur et translation

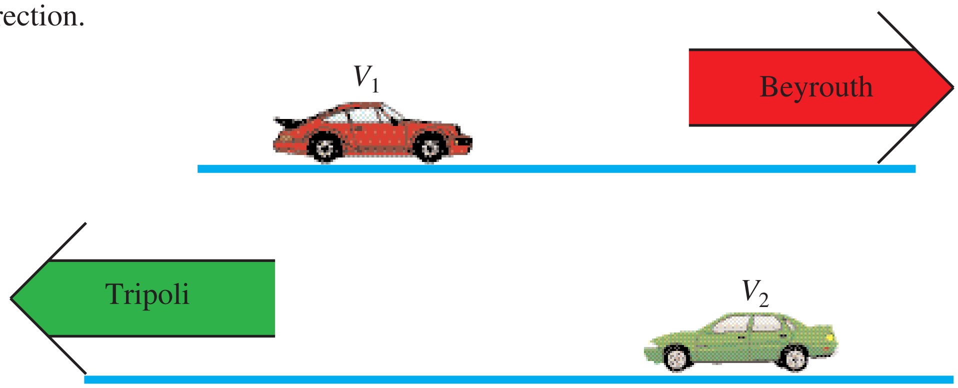
EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 DIRECTION ET SENS

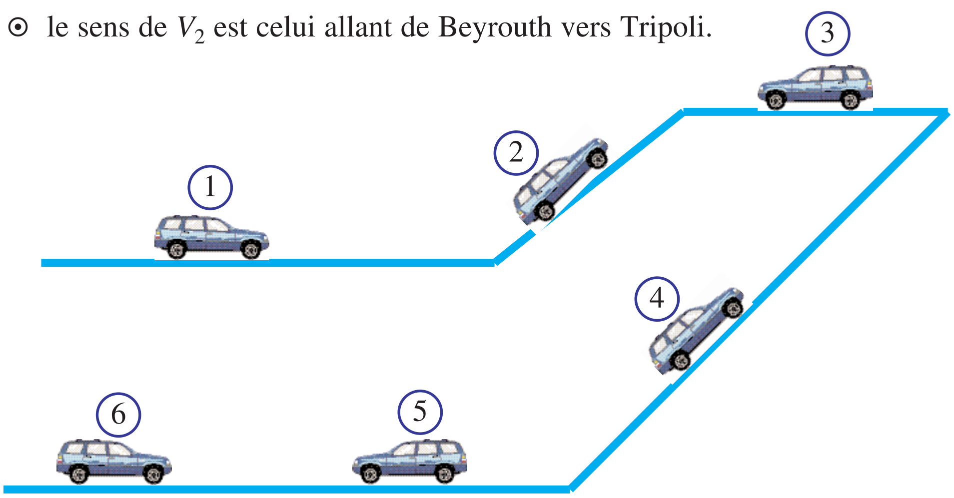
Activité

En observant le schéma ci-dessous, on dit, dans le langage courant, que ces deux voitures ne roulent pas dans la même direction.



Mais, en mathématiques, c'est différent : Ces deux voitures V_1 et V_2 circulent dans la **même direction** mais de **sens opposés.**

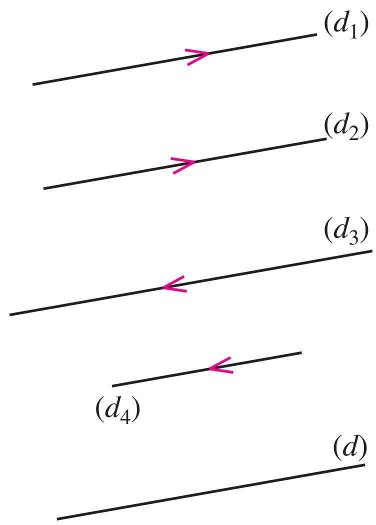
- Le sens de V_1 est celui allant de Tripoli vers Beyrouth.
- le sens de V_2 est celui allant de Beyrouth vers Tripoli.



Indique, par leurs numéros, les voitures qui circulent :

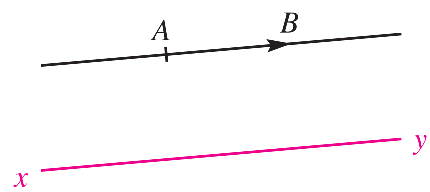
- dans la même direction.
- dans la même direction et dans le même sens.
- dans la même direction mais de sens opposés.

Définitions



- Lorsque des droites sont **parallèles**, on dit qu'elles ont la **même direction**.
  (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) ont la même direction qui est celle de (d).
- Une **direction étant donnée**, on peut choisir un **sens** sur celle-ci. Il y a donc deux possibilités comme l'indique le schéma.
  Sur (d_1) et (d_2), on a choisi un sens et sur (d_3) et (d_4), un autre sens qui est opposé au premier.

2 VECTEUR



Sur un segment $[AB]$, on définit :

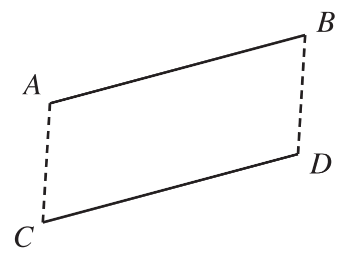
- **une direction** : celle de la droite (AB) ou de toute droite (xy) qui lui est parallèle.
- **un sens** : celui allant de A vers B.
- **une longueur** : celle du segment $[AB]$.

  Ces trois caractéristiques définissent un **vecteur** noté $\overrightarrow{AB}$. A est son **origine** et B est son **extrémité**.

Attention !

Dans la notation d'un vecteur ($\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$), la flèche qui surmonte ce vecteur est toujours représentée de la gauche vers la droite $\longrightarrow$.

3 VECTEURS ÉGAUX



Soit les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie :

⊙ **(AB) est parallèle à (CD)**,

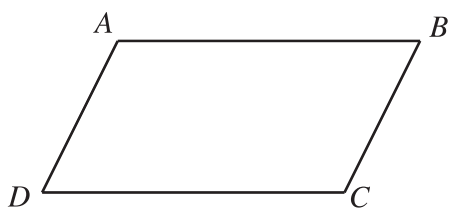
($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction).

⊙ **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens**.

⊙ **$AB = CD$** ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même longueur).

Par suite, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à ***ABDC* est un parallélogramme.**

Application 1



ABCD est un parallélogramme.

Complète :

⊙ $\overrightarrow{AB}$ = ... ; $\overrightarrow{AD}$ = ...

... = $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CB}$ = ...

⊙ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même .... et de sens ....

⊙ $\overrightarrow{AD}$ et .... sont de même direction.

⊙ $\overrightarrow{CB}$ et .... sont de sens opposés.

⊙ .... et $\overrightarrow{CD}$ ont même longueur.

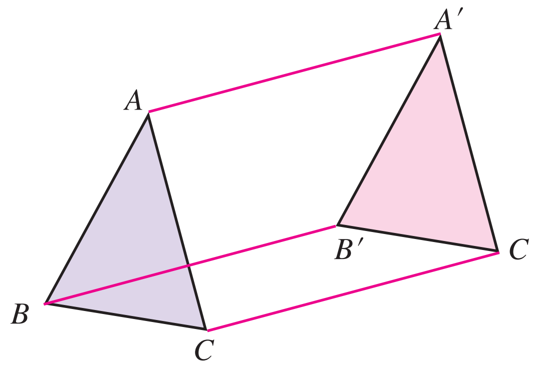
4 VECTEUR ET TRANSLATION

Le triangle $A'B'C'$ est obtenu en faisant glisser le triangle ABC :

⊙ dans la direction de la droite (AA'),

⊙ dans le sens allant de A vers A',

⊙ d'une longueur égale à celle du segment $[AA']$.



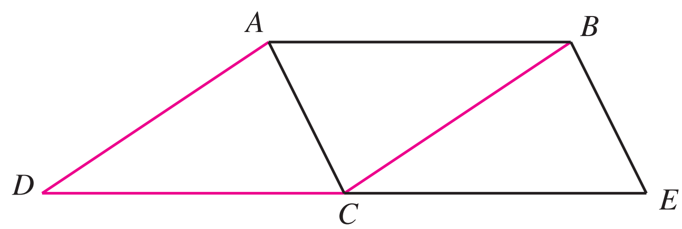
On dit que **$A'B'C'$ est l'image de ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$** .

On peut dire aussi que cette translation est de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$, car $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$.

Les points **A', B' et C'** s'appellent les **images** des points A, B et C, **par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$** ou les **translatés** de A, B et C.

Application 2

$ABCD$ et $ABEC$ sont deux parallélogrammes.



1°) Quelles sont les images respectives de C et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

2°) Donne un vecteur de translation qui transforme D en A et C en B.
Existe-t-il un autre vecteur ?

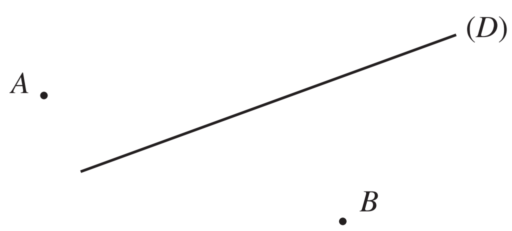
3°) Quelle est l'image du triangle ADC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 **1º)** Par les points A et B, trace les droites (D_1) et (D_2) ayant la même direction que (D).

2º) Combien de sens peut-on définir sur chacune de ces droites ?



2 On considère les figures 1, 2, 3 et 4.

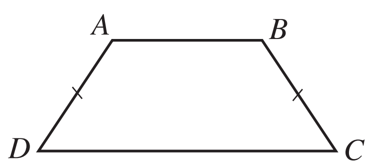


Fig. 1

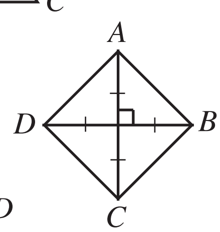


Fig. 2

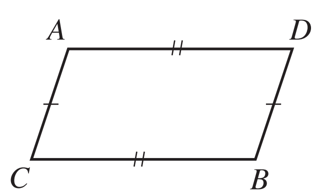


Fig. 3

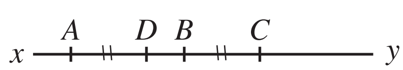
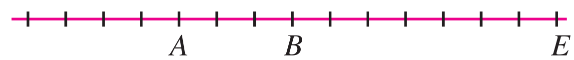


Fig. 4

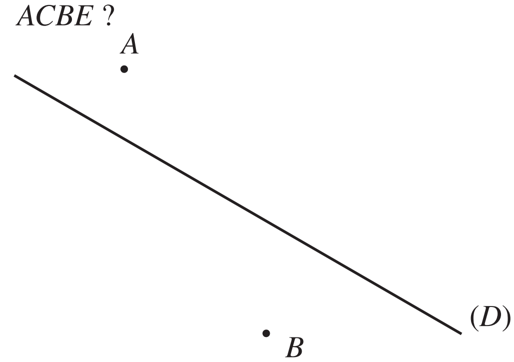
Indique les numéros des figures pour lesquelles on a :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

3 Place, sur la figure ci-dessous, les points C, D et F tels que :
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BE}$.



4 **1º)** Par les points A et B, trace les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}$ de même direction que (D), de longueur 4 cm et de sens opposés.

2º) Quelle est la nature du quadrilatère $ACBE$?



5 **1º)** Les points A, B et C sont fixes et non alignés.

a) Quelle est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

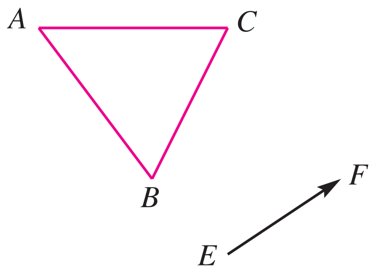
b) Quelle est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$?

2º) L'image d'un point E, par une translation, est le point F.

Quel est le vecteur de cette translation ?

3º) I est l'image de M, par la translation de vecteur $\overrightarrow{LE}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $MIEL$?

6 Construis l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.



7 Réponds par vrai ou faux.

1°) Pour désigner ce vecteur $B \leftarrow A$, on écrit $\overrightarrow{AB}$.

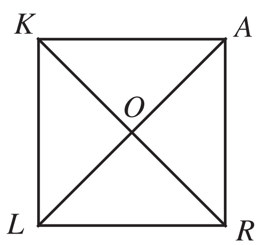
2°) **a)** Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $AB = CD$.

b) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors (AB) est parallèle à (CD).

c) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, alors B est le milieu de $[AC]$.

d) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

3°) $KARL$ est un carré de centre O.



a) (KA) et (RL) ont la même direction.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{KA}$ et $\overrightarrow{AR}$ ont la même direction.

c) $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{AO}$.

d) A est l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{LR}$.

e) La translation de vecteur $\overrightarrow{KL}$ est la seule qui transforme A en R.

f) L'image de L par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ est R.

g) L'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OR}$ est O.

Pour chercher

8 $ABCD$ est un carré de côté 3 cm. Construis l'image de ce carré par chacune des translations :

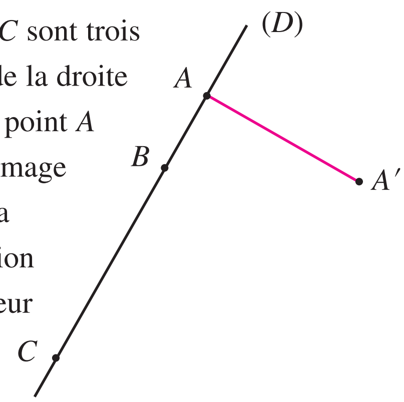
a) de vecteur $\overrightarrow{AB}$,

b) de vecteur $\overrightarrow{BC}$,

c) de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Donne, dans chaque cas, la nature du quadrilatère obtenu.

9 A, B et C sont trois points de la droite (D). Le point A a pour image A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.



1°) Construis les images B' et C' des points B et C, par cette translation.

2°) Quelle est la nature des quadrilatères $AA'B'B$ et $AA'C'C$?
Montre alors que les points A' , B' et C' sont sur une même droite (D').

3°) Quelle est l'image de la droite (D) par cette translation ?

10 On considère un triangle ABC et la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

1°) Quelle est l'image de A par cette translation ?

2°) Construis les images B' et C' de B et C , respectivement, par cette translation.

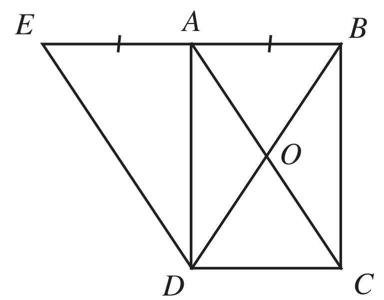
3°) Montre que $BB' = CC'$.

4°) Quelle est la nature des quadrilatères $ACB'B$ et $BCC'B'$?

5°) Déduis que les deux triangles ABC et $CB'C'$ sont superposables.

TEST

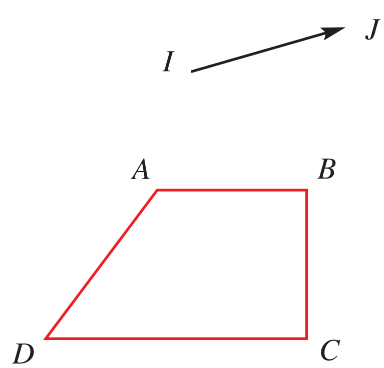
1 On considère la figure ci-contre.
Complète le tableau suivant en cochant la bonne réponse.



	Vrai	Faux
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$		
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$		
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$		
$AC = BD$		
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DE}$		
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$		

(3 points)

2 Construis l'image du trapèze $ABCD$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.



(3 points)

3 $ABCD$ est un losange.

1°) Construis le point E image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

2°) Justifie l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE}$.

3°) Que peux-tu dire du point C pour le segment $[BE]$? **(6 points)**

4 Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 4 cm. On place un point O' à 6 cm de O.

1°) Quelle est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$?

2°) Soit A un point de (C). Construis l'image A' de A par cette translation. Quelle est la nature du quadrilatère $OO'A'A$?

Complète alors : $\overrightarrow{OA}$ = ... et $OA = O'A'$ = ... cm.

3°) On trace le cercle (C') de centre O' et de rayon 4 cm.

a) Soit B un point de (C) et B' son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. Quelle est la nature du quadrilatère $OO'B'B$?

b) Complète : $\overrightarrow{OB}$ = ... et $OB = O'B'$ = ... cm.
Où se trouve alors le point B' ? **(8 points)**

23 LIEUX GÉOMÉTRIQUES ET CONSTRUCTIONS

Objectifs

1. Rechercher le lieu géométrique des points vérifiant une propriété donnée.
2. Utiliser les lieux géométriques dans des constructions.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Lieu géométrique

2. Quelques lieux géométriques
1º) Médiatrice d'un segment
2º) Cercle
3º) Cercle de diamètre fixe
4º) Bissectrice d'un angle
5º) Droite faisant un angle constant avec une autre droite fixe
6º) Droite menée d'un point fixe parallèlement à une autre droite fixe

3. Constructions

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 LIEU GÉOMÉTRIQUE

Définition

Un lieu géométrique est une **ligne** (droite ou courbe) formée par tous les points qui jouissent d'une **même propriété**.

L'énoncé d'un lieu géométrique comporte donc :

- le nom de la ligne qui constitue le lieu;
- la propriété dont jouissent les points de cette ligne.

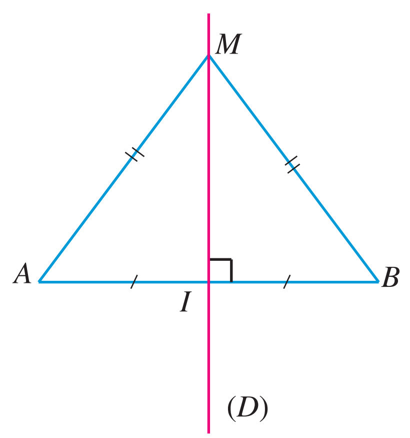
2 QUELQUES LIEUX GÉOMÉTRIQUES

1º) Médiatrice d'un segment

A et *B* sont deux points fixes.

M est un point variable équidistant de *A* et *B*.

La médiatrice (*D*) du segment [*AB*] est le lieu géométrique de tous les points *M* équidistants de *A* et *B* .



(*D*) est la médiatrice de [*AB*]

Application 1

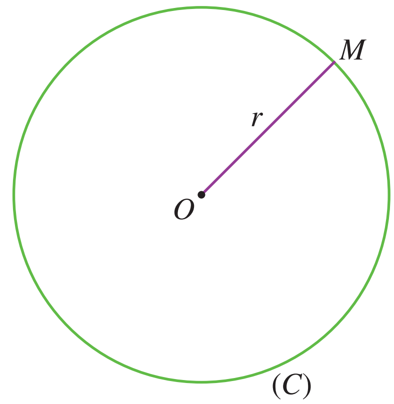
E et *F* sont deux points fixes. (*C*) est un cercle variable de centre *I* passant par *A* et *B*.

Quel est le lieu géométrique de *I* ?

2º) Cercle

O est un point fixe.

M est un point variable tel que $OM = r =$ constante.



(C) est le cercle de centre O et de rayon r

Le cercle (C) de centre O et de rayon r est le lieu géométrique de tous les points situés à une distance constante r de O .

Application 2

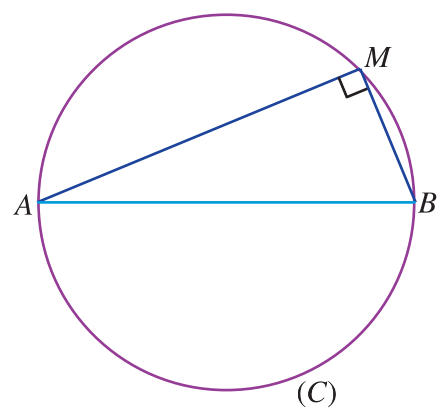
ABC est un triangle rectangle en A tel que A est fixe, B et C variables avec $BC = 6$ cm.

Quel est le lieu géométrique du point I milieu de [BC] ?

3º) Cercle de diamètre fixe

A et B sont deux points fixes.

M est un point variable tel que $\widehat{AMB} = 90°$.



(C) est le cercle de diamètre [AB]

Le cercle (C) de diamètre fixe [AB] est le lieu géométrique de tous les points M tel que $\widehat{AMB} = 90°$.

Application 3

ABC est un triangle tel que A et B sont fixes et C variable.

[AH] est un segment-hauteur de ce triangle.

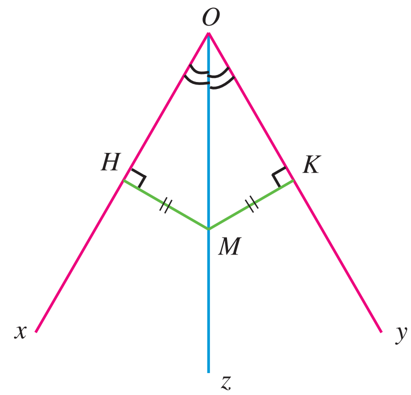
Quel est le lieu géométrique de H ?

4°) Bissectrice d'un angle

$\widehat{xOy}$ est un angle fixe.

M est un point variable équidistant de $[Ox)$ et $[Oy)$.

La bissectrice $[Oz)$ de l'angle $\widehat{xOy}$ est le lieu géométrique de tous les points M équidistants des côtés $[Ox)$ et $[Oy)$ de cet angle.



$[Oz)$ est la bissectrice de $\widehat{xOy}$

Application 4

$\widehat{xAy}$ est un angle fixe. B et C sont deux points variables situés respectivement sur $[Ax)$ et $[Ay)$ et tel que $AB = AC$. Les perpendiculaires menées de B à $[Ax)$ et de C à $[Ay)$ se coupent en I .

1°) Montre que les deux triangles ABI et ACI sont superposables.

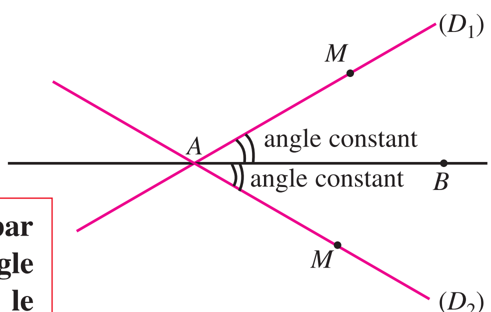
2°) Quel est le lieu géométrique de I ?

5°) Droite faisant un angle constant avec une autre droite fixe

(AB) est une droite fixe.

M est un point variable tel que l'angle $\widehat{MAB}$ est constant.

Les droites (D_1) et (D_2) passant par A et qui forment le même angle constant avec (AB) constituent le lieu géométrique des points M tel que $\widehat{MAB}$ est cet angle.



(D_1) et (D_2) forment le même angle constant avec (AB)

Application 5

O est un point fixe et A un point variable d'une droite fixe (xy).

Par le point A on mène une perpendiculaire à (xy) sur laquelle on porte $AM = OA$.

1°) Pourquoi le point M est-il variable ?

2°) Quelle est la nature du triangle AOM ?

3°) Quel est le lieu géométrique de M ?

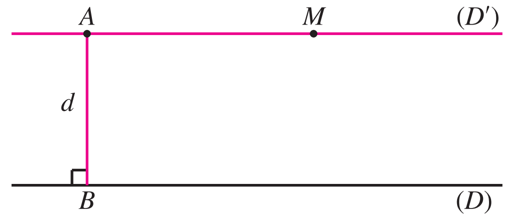
6º) Droite menée d'un point fixe parallèlement à une autre droite fixe

(D) est une droite fixe.

A est un point fixe.

La distance d de A à (D) est donc constante.

M est un point variable tel que la distance de M à (D) est égale à d.



(D) fixe et A fixe
La distance d de A à (D) est constante.

> **La droite (D') passant par A et parallèle à (D) est le lieu géométrique des points M tel que la distance de M à (D) est une constante égale à celle de A à (D)**

Application 6

(D) est une droite fixe et R un point fixe n'appartenant pas à (D). A est un point variable sur (D). On prolonge [RA] d'une longueur $AP = RA$.

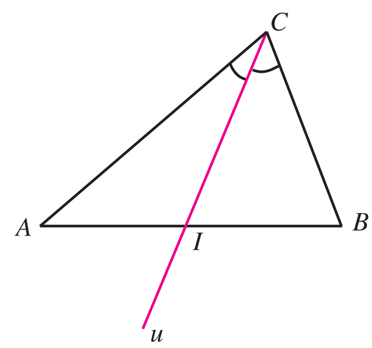
1º) Pourquoi le point P est-il variable ?

2º) Les perpendiculaires menées de R et P à (D) la coupent respectivement en T et S .
a) Montre que les triangles RAT et PAS sont superposables.
b) Déduis le lieu géométrique de P.

3 CONSTRUCTIONS

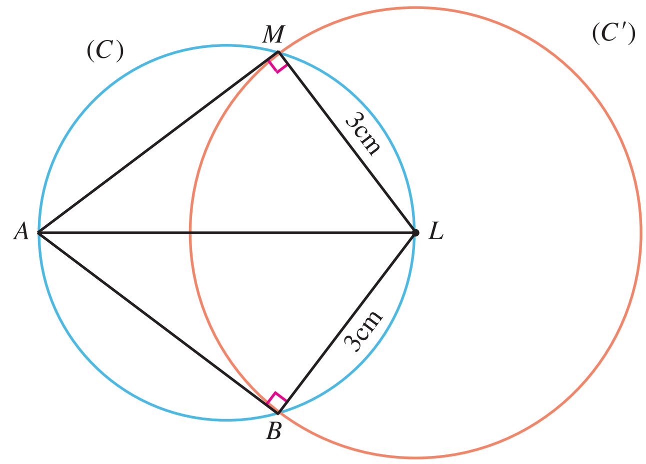
1º) Etant donné un triangle ABC, trouve sur le côté [AB] un point I équidistant des côtés [AC] et [BC].

⊙ Comme I est équidistant des côtés [AC] et [BC] de l'angle $\widehat{ACB}$, il appartient à la bissectrice [Cu) de cet angle. Or I appartient à [AB]; I est donc le point d'intersection de [Cu) et [AB].



2°) [AL] est un segment fixe tel que $AL = 5$ cm.
Construis le triangle MAL rectangle en M et tel que $LM = 3$ cm.

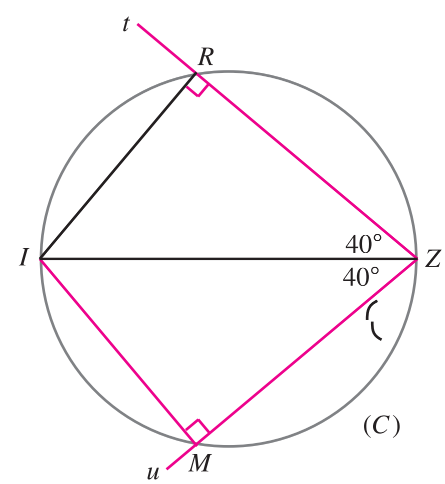
⊙ Le triangle MAL étant rectangle en M, le sommet M se trouve sur le cercle (C) de diamètre $AL = 5$ cm.
Comme $LM = 3$ cm et L fixe, M se trouve sur le cercle (C') de centre L et de rayon 3 cm.
M est donc le point d'intersection des deux cercles (C) et (C').
Les cercles (C) et (C') se coupant en deux points M et B, il existe donc deux triangles MAL et BAL répondant à la question posée.



3°) Construis le triangle RIZ rectangle en R et tel que $IZ = 5$ cm et l'angle $\widehat{IZR} = 40°$.

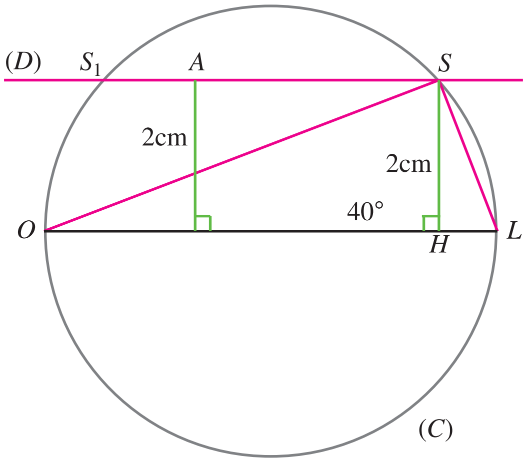
⊙ Le triangle RIZ étant rectangle d'hypoténuse fixe [IZ], le sommet R appartient au cercle (C) de diamètre $IZ = 5$ cm.
L'angle $\widehat{IZR}$ étant constant et égal à 40°, le point R appartient à la demi-droite [Zt) faisant avec (IZ) un angle de 40°.

⊙ R est donc le point d'intersection de (C) et (Zt).
Il existe une deuxième demi-droite
[Zu) faisant un angle de 40° avec (IZ) et qui coupe (C) en M.
Il y a donc deux triangles RIZ et MIZ répondant à la question posée.



4º) [OL] est un segment fixe de longueur 6 cm et A un point fixe donné dont la distance à (OL) est 2 cm. Construis le triangle SOL rectangle en S de hauteur [SH] qui mesure 2 cm et tel que le sommet S soit du même côté que A par rapport à (OL).

⊙ Le triangle SOL étant rectangle d'hypoténuse fixe [OL], le sommet S appartient au cercle (C) de diamètre $OL = 6$ cm.
Comme $SH = 2$ cm, alors S appartient à la droite (D) passant par A et parallèle à (OL).
(D) coupe (C) en deux points S et S_1. Il existe donc deux triangles SOL et S_1OL répondant à la question posée.



Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 $ABCD$ est un rectangle tel que A et B sont fixes. Les points C et D sont variables.
Trouve le lieu géométrique du point I centre de ce rectangle.

2 $MONI$ est un losange avec M et N fixes, O et I variables.
Trouve le lieu géométrique des points O et I.

3 (C) est un cercle de centre O, de diamètre [AB] fixe et de rayon r. M est un point variable de (C). Sur la demi-droite [BM) on prend un point N tel que $BM = MN$.

1º) Le point O est-il fixe ? Justifie.

2º) Montre que (OM) est parallèle à (AN).

3º) Quel est le lieu géométrique de N ?

4 Cherche et construis le lieu géométrique du centre O d'un losange $PIED$ tel que $[PI]$ est fixe.

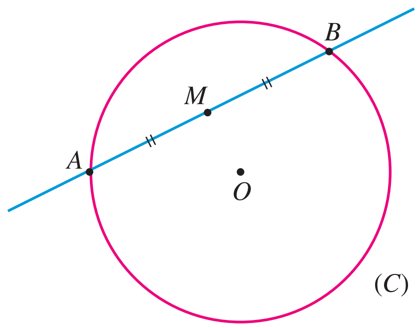
5 $[OI]$ est un segment fixe. Une demi-droite $[Ou)$ variable tourne autour de O. La perpendiculaire menée de I à $[Ou)$ la coupe en M.

Cherche et construis le lieu géométrique du point M.

6 Soit (C) un cercle fixe de centre O et A un point fixe de (C). Une droite variable passant par A recoupe le cercle en B. On désigne par M le milieu de $[AB]$.

1°) Montre que (OM) est perpendiculaire à (AB).

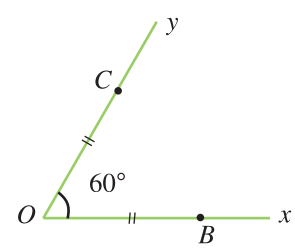
2°) Cherche et construis le lieu géométrique de M.



7 $\widehat{xOy}$ est un angle fixe tel que $\widehat{xOy} = 60°$, B et C sont deux points variables sur $[Ox)$ et $[Oy)$ respectivement tels que $OB = OC$.

1°) Quelle est la nature du triangle OBC ?

2°) Trouve et construis le lieu géométrique du point M milieu de $[BC]$.



8 $\widehat{xOy}$ est un angle droit et M est un point variable de $[Ox)$. Sur la perpendiculaire en M à $[Ox)$ et à l'intérieur de l'angle $\widehat{xOy}$ on place le point N tel que $NM = MO$.

1°) Quelle est la nature du triangle MON ?

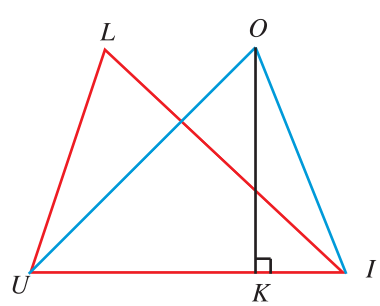
2°) Cherche et construis le lieu géométrique du point N.

9 **1°)** OUI est un triangle fixe tel que $UI = 4$ cm. Sa hauteur $[OK]$ mesure 3 cm. Calcule l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle.

2°) LUI est un triangle de sommet L variable situé du même côté de O par rapport à (UI) et de même aire que le triangle OUI.

a) Calcule la hauteur $[LH]$ du triangle LUI.

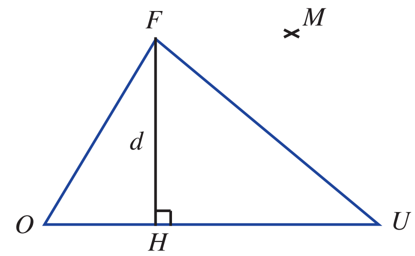
b) Cherche et construis alors le lieu géométrique de L.



10 $[AS]$ est un segment fixe de milieu I. Un point P varie sur une droite fixe (D) passant par S.

Trouve et construis le lieu géométrique du point M milieu de $[PA]$.

11 OUF est un triangle fixe de hauteur $[FH]$ avec $FH = d$ et M est un point variable de son plan.



Réponds par vrai ou faux.

1º) F est un point variable.

2º) $[OU]$ est un segment fixe.

3º) F est à une distance constante de $[OU]$.

4º) Si M est équidistant de $[FO]$ et de $[FU]$, alors M est sur la médiatrice de $[OU]$.

5º) Si M est du même côté de F par rapport à (OU) et à la distance d de $[OU]$, alors M varie sur la parallèle menée de F à (OU).

6º) Si M est équidistant de $[OF]$ et $[OU]$, alors M varie sur la bissectrice de l'angle $\widehat{FOU}$.

7º) Si $\widehat{OUM} = 90°$, alors M appartient au cercle de diamètre $[OU]$.

8º) Si M est tel que $\widehat{MOU} = 60°$, alors M varie sur la demi-droite $[Ot)$ faisant avec (OU) un angle de $60°$.

9º) Si $\widehat{FMU} = 90°$, alors M appartient au cercle de diamètre $[FU]$.

10º) Si (MH) est perpendiculaire à (OU), alors M varie sur la droite (FH).

Pour chercher

12 A et B sont deux points fixes. (C) est un cercle variable de centre O passant par A et B.

Quel est le lieu géométrique de O ?

13 ABC est un triangle isocèle de sommet A variable et de base $[BC]$ fixe.

Les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ se coupent en I.

1º) I est un point variable. Justifie.

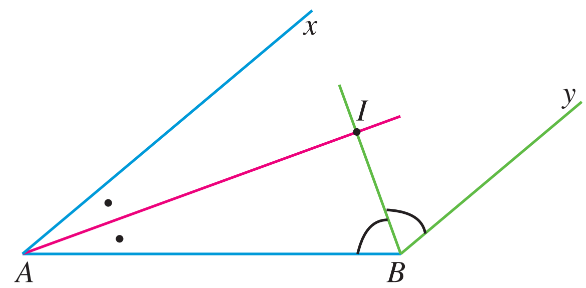
2º) Quel est le lieu géométrique de I ?

14 A et B sont fixes.
$[Ax)$ et $[By)$ sont variables et parallèles.

Les bissectrices des angles $\widehat{BAx}$ et $\widehat{ABy}$ se coupent en I.

1º) Quelle est la nature du triangle ABI ?

2º) Quel est alors le lieu géométrique de I ?



15 On donne un angle $\widehat{xAy}$ fixe avec $\widehat{xAy} = 60°$. M est un point variable de $[Ax)$ et N est le symétrique de M par rapport à $[Ay)$.

1º) Quelle est la nature du triangle AMN ?

2º) Cherche et construis le lieu géométrique de N.

16 $\widehat{xOy}$ est un angle fixe, A est un point variable sur $[Ox)$. On mène de A la parallèle à $[Oy)$ sur laquelle on place le point B tel que $AB = AO$ $\big([AB)$ et $[Oy)$ sont d'un même côté par rapport à $[Ox)\big)$.

Cherche et construis le lieu géométrique du point B.

17 EST est un triangle tel que E et S sont fixes et T variable avec $\widehat{EST} = 50°$. On désigne par I le milieu de $[SE]$.

1º) Comment se déplace le point T ?

2º) Cherche et construis le lieu géométrique du point M milieu de $[ET]$.

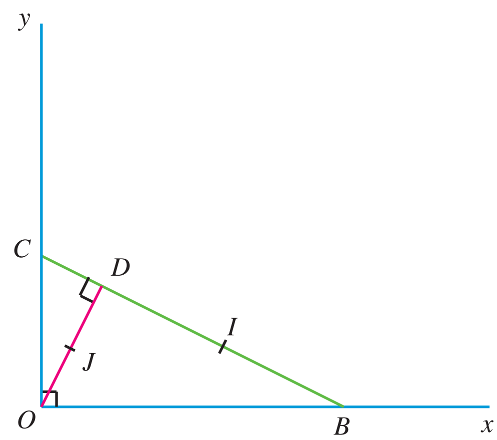
18 A est un point variable sur un demi-cercle de diamètre $[BC]$ fixe. On porte sur la demi-droite $[BA)$ un point D tel que $BD = AC$. Sur la demi-droite $[Bx)$ tangente en B à ce demi-cercle on place le point E tel que $BE = BC$.

1º) Montre que les deux triangles ABC et BDE sont superposables. Déduis alors la valeur de l'angle $\widehat{BDE}$.

2º) Cherche et construis le lieu géométrique du point D.

19 Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites perpendiculaires, B un point variable de $[Ox)$ et C un point fixe de $[Oy)$.

La perpendiculaire menée de O à (BC) la coupe en D. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[BD]$ et $[OD]$.



1º) Montre que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (OC).

2º) Que peux-tu dire à propos du point J dans le triangle OIC ?

3º) Soit F le point d'intersection des deux droites (OI) et (CJ). Cherche et construis le lieu géométrique du point F quand B varie sur $[Ox)$.

Constructions

20 Construis un triangle SOL rectangle en S et tel que $OL = 8$ cm et $SO = 5$ cm.

21 O et I étant deux points fixes tels que $OI = 6$ cm, construis un triangle rectangle isocèle FOI d'hypoténuse $[OI]$.

22 SOL est un triangle quelconque.

Construis le point I équidistant de $[SO]$ et $[OL]$ et tel que $IS = IO$.

23 Trace un segment fixe $[IL]$ de longueur 8 cm. K est un point de $[IL]$ tel que $IK = 5$ cm. Sur la demi-droite $[Kx)$ perpendiculaire en K à (IL) place le point E tel que $KE = 2$ cm.

Construis un triangle FIL rectangle en F et dont la hauteur $[FH]$ mesure 2 cm.

24 A et S sont deux points fixes tels que $SA = 3$ cm.

Construis un triangle PAS rectangle en S et tel que $AP = 4$ cm.

25 Construis un triangle équilatéral MAL de hauteur $[MH]$ et tel que $MH = 2$ cm.

TEST

1 Complète le tableau suivant (M est un point variable du plan).

Propriété de M	Lieu géométrique de M
	M appartient à la bissectrice $[Ou)$ de l'angle $\widehat{xOy}$
$\widehat{AMB} = 90°$ (A et B sont fixes)	
$\widehat{MAB} = 50°$ (A et B sont fixes)	
	M forme avec le point fixe A une droite (D) parallèle à la droite fixe (xy)

(4 points)

2 Un triangle SAL est tel que L et S sont fixes et A est variable. Cherche et construis le lieu géométrique de A si $\widehat{ASL} + \widehat{LAS} = 130°$. **(2 points)**

3 On donne deux points fixes A et T; F est un point fixe du segment $[AT]$. Sur la perpendiculaire (xy) menée de F à (AT), on prend un point variable R. La perpendiculaire menée de T à (AR) coupe (xy) en I et (AR) en J.

1º) Quel rôle joue le point I dans le triangle RAT ? **(2 points)**

2º) Cherche et construis le lieu géométrique du point d'intersection M de (AI) et (RT). **(3 points)**

4 (xy) est une droite fixe et A un point fixe n'appartenant pas à (xy); $[AH]$ la perpendiculaire menée de A à (xy) et I le milieu de $[AH]$.

1º) Pourquoi le point I est-il fixe ? **(2 points)**

2º) Une droite variable passant par A rencontre (xy) en B. Cherche et construis le lieu géométrique du point M milieu de $[AB]$. **(3 points)**

5 TAS est un triangle quelconque.

Construis, à l'intérieur de ce triangle, le point I équidistant de ses trois côtés. **(4 points)**

24 GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Objectif

Reconnaître les positions relatives de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Plan

2. Détermination d'un plan

3. Positions relatives de deux plans

4. Positions relatives de deux droites

5. Positions relatives d'une droite et d'un plan

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 PLAN

Le triangle *ABC* se trouve dans un plan appelé plan de ce triangle, qu'on note, parfois, (*P*) ou (*Q*) ou (*R*)...

Le plan est représenté par un parallélogramme.

Le plan est illimité.

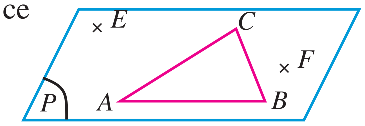


Fig. 1

2 DÉTERMINATION D'UN PLAN

Trois points non alignés *A*, *B* et *C* déterminent **un seul plan** qu'on note (*ABC*).

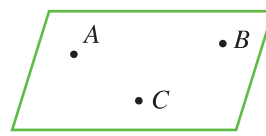


Fig. 2

Deux droites sécantes (*D*) et (*D'*) déterminent **un seul plan** qu'on note $\big((D), (D')\big)$.

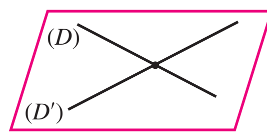


Fig. 3

Deux droites parallèles (*EF*) et (*BC*) déterminent **un seul plan** qu'on note $\big((EF), (BC)\big)$.

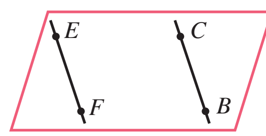


Fig. 4

Une droite (*D*) et un point *C* qui n'appartient pas à (*D*), déterminent **un seul plan** qu'on note $\big((D), C\big)$.

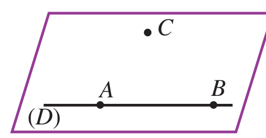


Fig. 5

3 POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

ABCDEFGH est un pavé droit.

1°) Plans parallèles

Les faces *ABCD* et *EFGH* se trouvent respectivement dans les plans (*P*) et (*Q*). Ces plans n'ont aucun point commun, ils sont dits **plans parallèles** et on écrit : **(*P*) // (*Q*)**.

Deux plans sont parallèles s'ils n'ont aucun point commun.

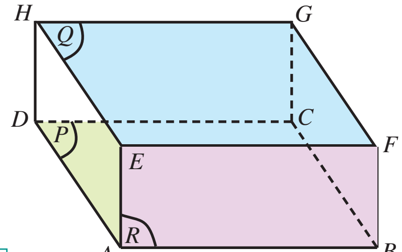


Fig. 6

2°) Plans sécants

La face *ABFE* se trouve dans le plan (*R*).

Les plans (*P*) et (*R*) ont en commun seulement la droite (*AB*).

Les plans (*P*) et (*R*) sont dits **deux plans sécants et leur intersection** (partie commune) **est la droite (*AB*).**

Deux plans sécants se coupent suivant une droite.

Application 1

Les faces du pavé droit de la figure 3 se trouvent dans des plans. Nomme ces plans.

Quels sont parmi ces plans ceux qui sont parallèles ?

Cite parmi les plans des faces ceux qui sont sécants et détermine leur intersection deux à deux.

4 POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

ABCDEFGH est un pavé droit. (fig 4)

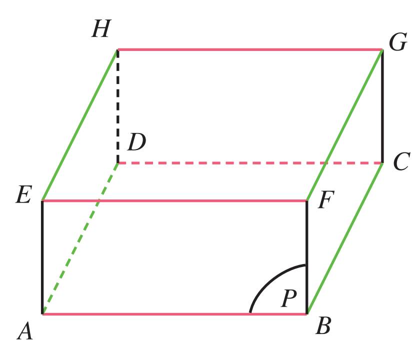


Fig. 7

1°) Droites coplanaires

Le quadrilatère *ABFE* est un rectangle qui se trouve dans le plan (*P*).

Dans le plan (*P*) les droites (*AB*) et (*EF*) sont parallèles et les droites (*AB*) et (*AE*) sont concourantes (sécantes).

Deux droites d'un plan sont dites coplanaires; elles sont parallèles ou sécantes.

Dans le plan (*P*) :

- (*AB*) // (*EF*),
- (*AB*) et (*AE*) sont sécantes.

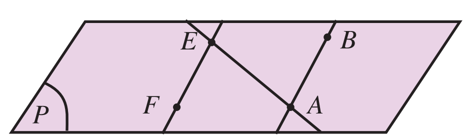


Fig. 8

2°) Droites non coplanaires

Les droites (AB) et (EH) de la figure 4 ne sont pas dans un même plan :

(AB) et (EH) ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont dites : **deux droites non coplanaires.**

Remarque

Deux droites qui ne sont pas sécantes ne sont pas nécessairement parallèles.

(AB) et (FG) de la figure 4 ne se coupent pas et ne sont pas parallèles.

Application 2

Nomme les droites parallèles de la figure 7.

Nomme quatre couples de droites concourantes de la figure 7.

Peut-on conclure que : **deux droites parallèles à une troisième sont parallèles ?**

5 POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

(P) est le plan de la base $ABCD$ d'un prisme droit $ABCDEFGH$ (fig. 8).

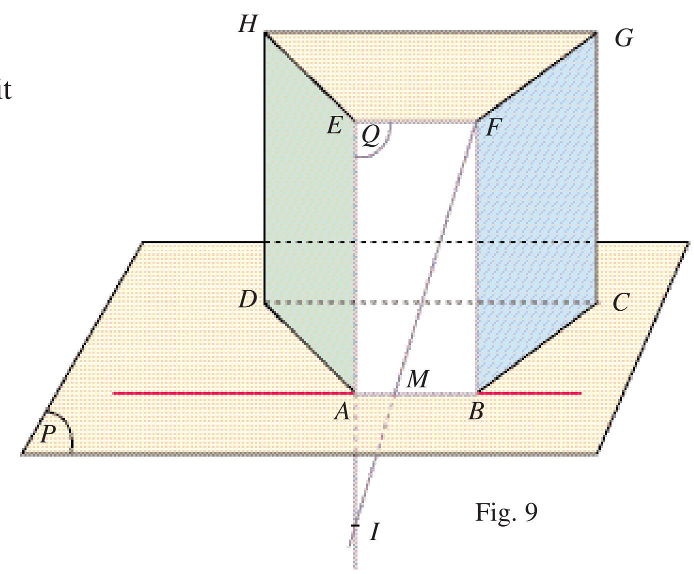


Fig. 9

1°) Droite dans le plan

La droite (AB) a deux de ses points A et B dans le plan (P), elle est dans (P).

Toute droite qui a deux de ses points dans un plan est entièrement dans ce plan.

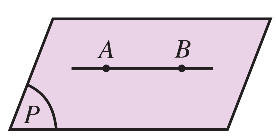


Fig. 10

(AB) est dans (P).

2º) Droite sécante au plan

F est un point qui n'est pas dans (P) et M un point de la droite (AB) (fig. 8)
La droite (FM) n'est pas dans (P), car elle a le point F qui n'est pas dans (P). La droite (FM) coupe (P) en M.

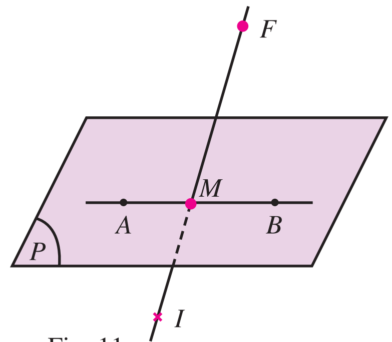


Fig. 11

(FM) coupe (P).

Une droite qui a un seul point commun avec un plan est dite sécante au plan. Elle coupe ou perce (P). (fig. 10)

3º) Droite parallèle au plan

La droite (EF) n'a aucun point commun avec (P) (fig. 8).
(D) est dite parallèle à (P).

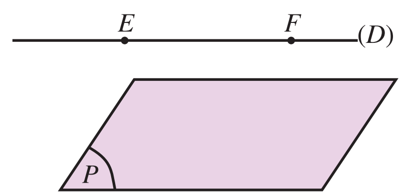


Fig. 12

Une droite (D) qui n'a aucun point commun avec un plan (P) est dite parallèle à (P) : $(D) // (P)$. (fig. 11)

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Réponds par vrai ou faux.

1º) Une droite qui a deux points dans un plan, est contenue dans ce plan.

2º) Deux droites non coplanaires se coupent en un point.

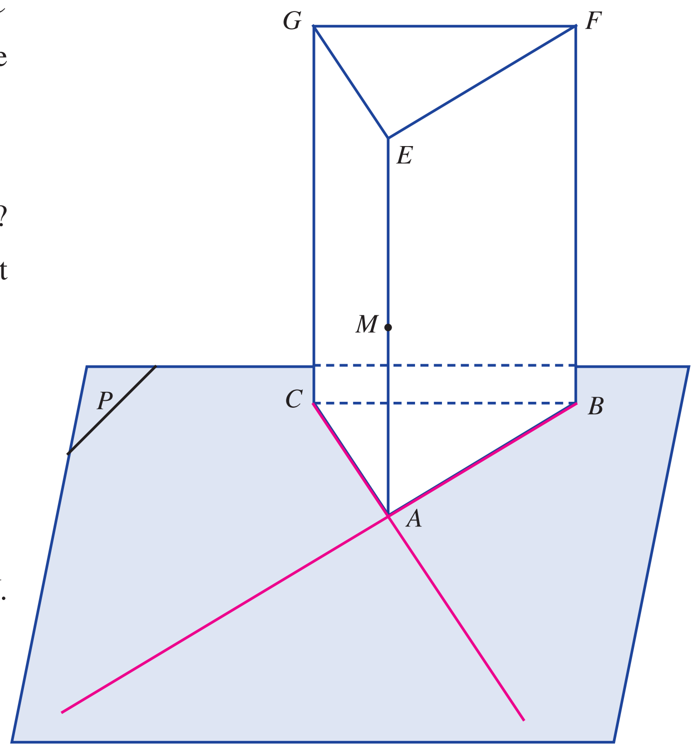
3º) Deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles.

4º) Deux plans sécants se coupent suivant une droite.

5º) Deux plans parallèles ont une droite commune.

6º) Une droite sécante au plan le coupe en deux points distincts.

2 Soit (P) le plan de la base ABC d'un prisme droit $ABCEFG$ et M le milieu de l'arête $[AE]$.



1º) (EF) est-elle parallèle à (AB) ? En est-il de même pour (FM) et (AB)?

2º) (FM) coupe (AB) en I. Ce point I est-il un point de (P) ?

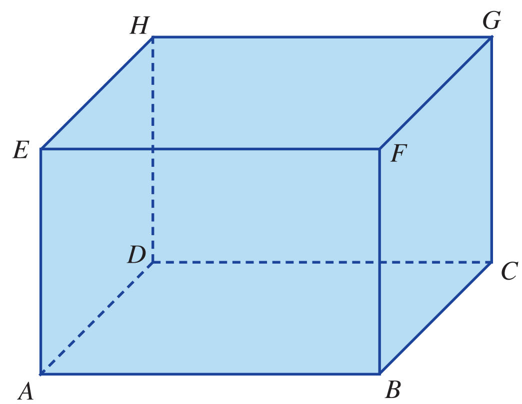
3º) La droite (GM) coupe (P) en J. Place le point J.

3 $ABCDEFGH$ est un pavé droit.

1º) Les droites (AE) et (CG) sont-elles coplanaires ? Pourquoi ?

2º) Les droites (BF) et (DH) sont-elles coplanaires ? Pourquoi ?

3º) Soient I et J les centres des rectangles $ABCD$ et $EFGH$. Dessine l'intersection des plans $\big((AE), (CG)\big)$ et $\big((BF), (DH)\big)$.

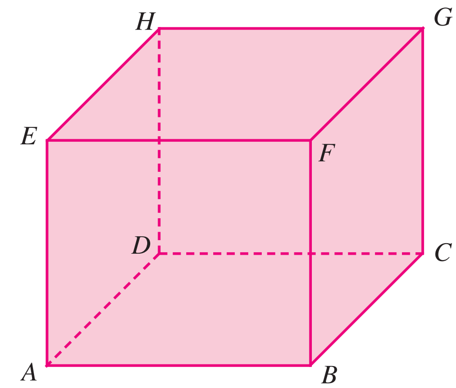


4 Soient O et O' les centres des bases $ABCD$ et $EFGH$ d'un cube $ABCDEFGH$.

1°) Montre que le quadrilatère $ACGE$ est un parallélogramme.

2°) Montre que (OO') est parallèle à (AE).

3°) Montre que (OO') est dans le plan formé par les droites (BF) et (DH).

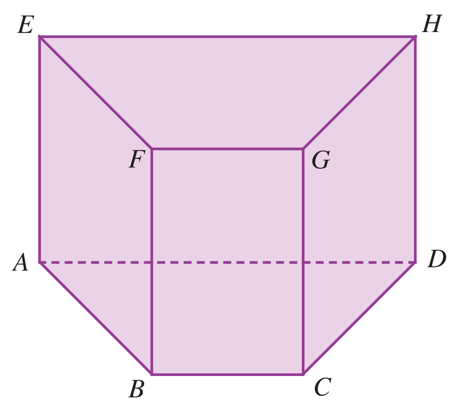


Pour chercher

5 Les trapèzes $ABCD$ et $EFGH$ sont les bases d'un prisme droit. Soit I le point d'intersection des droites (AB) et (DC).

1°) I est-il un point du plan de la base $ABCD$?

2°) Soit J le point d'intersection de (EF) et (GH). Dessine l'intersection des plans $\big((AB), (FE)\big)$ et $\big((CD), (GH)\big)$.

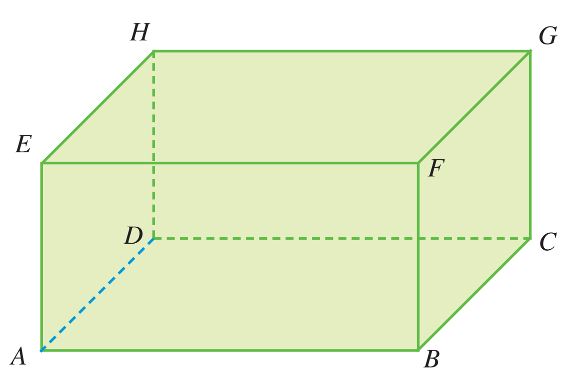


6 $ABCDEFGH$ est un pavé droit.

1°) Montre que $AHGB$ est un parallélogramme.

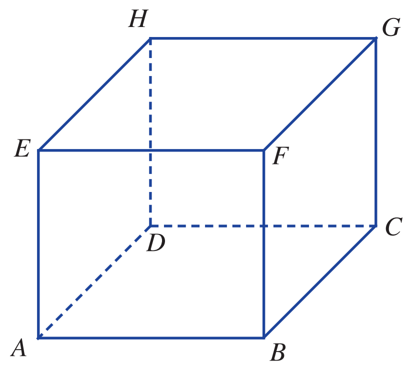
2°) (HG) et (AB) sont-elles parallèles ?

3°) Dessine l'intersection des plans $\big((AB), (GH)\big)$ et $\big((DH), (BF)\big)$.



TEST

1 Soient M, N, P et Q les milieux respectifs des arêtes $[AD]$, $[EH]$, $[AB]$ et $[EF]$ du cube $ABCDEFGH$.



1°) Dessine le plan contenant les points M, N, P et Q. **(2 points)**

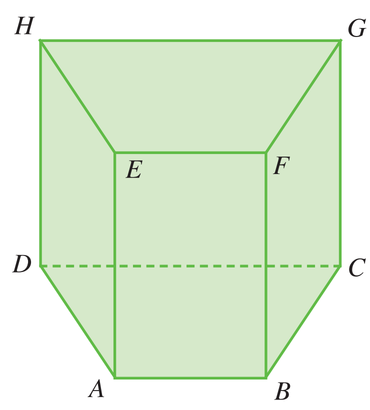
2°) (MP) et (BD) sont-elles parallèles ? **(2 points)**

3°) (MN) et (HG) sont-elles coplanaires ? **(2 points)**

4°) Nomme deux plans parallèles. **(2 points)**

5°) Nomme les intersections du plan $\big((MN), (PQ)\big)$ avec les plans $\big((AB), (CD)\big)$, $\big((AD), (HE)\big)$ et $\big((EF), (GH)\big)$. **(3 points)**

2 $ABCDEFGH$ est un prisme droit dont les bases $ABCD$ et $EFGH$ sont des trapèzes isocèles.



1°) Nomme les sommets du prisme qui sont dans le plan (ACE). **(3 points)**

2°) Quel est le plan de la figure qui est parallèle au plan $\big((AE), (BF)\big)$? **(3 points)**

3°) Les points C, D, E et F sont-ils dans le même plan ? **(3 points)**

25 PYRAMIDE

Objectifs

1. Dessiner une pyramide à base donnée.

2. Calculer l'aire latérale et le volume d'une pyramide.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Définitions

2. Polygone régulier

3. Pyramide régulière

4. Tétraèdre

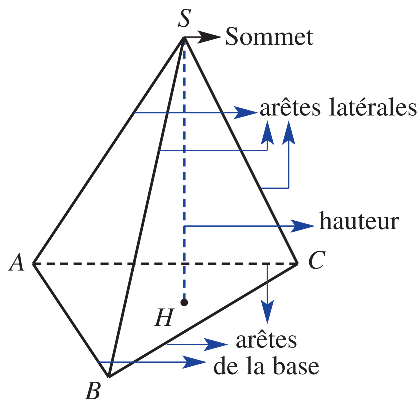
5. Aire d'une pyramide

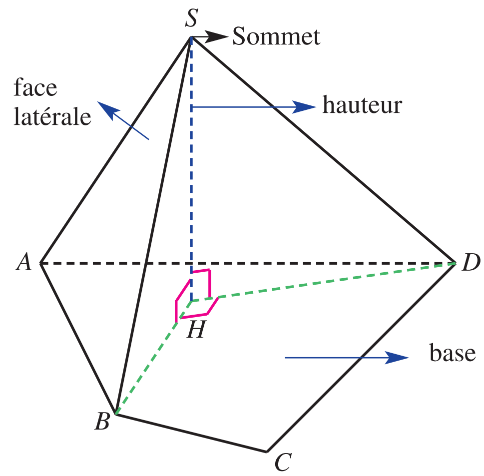
6. Volume d'une pyramide

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 DÉFINITIONS





Une **pyramide** est un solide limité par :

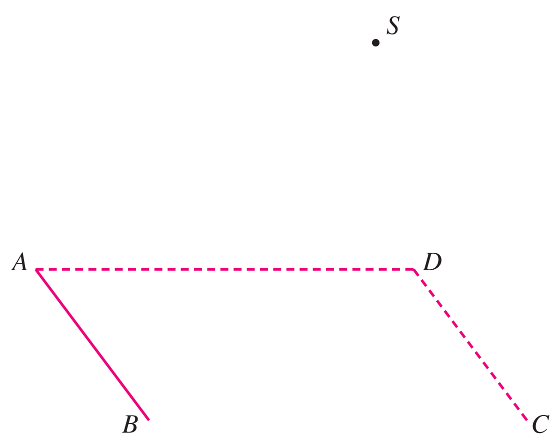
une **base polygonale** (triangle, quadrilatère, pentagone, ...) et **des faces latérales triangulaires.**

Le sommet de la pyramide est **le sommet commun à toutes les faces latérales.**
[*SH*] est la **hauteur** de la pyramide.

Remarque
Le nombre des faces latérales d'une pyramide est égal au nombre des arêtes de sa base.

Application 1

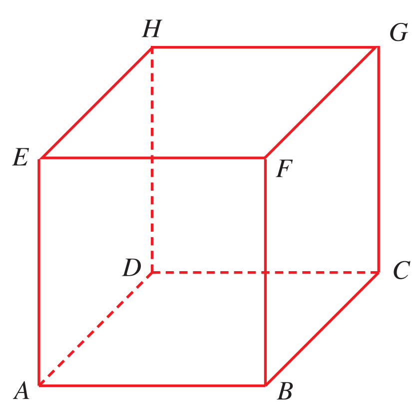
S est le sommet de la pyramide dont la base est le parallélogramme *ABCD*. Complète cette pyramide.



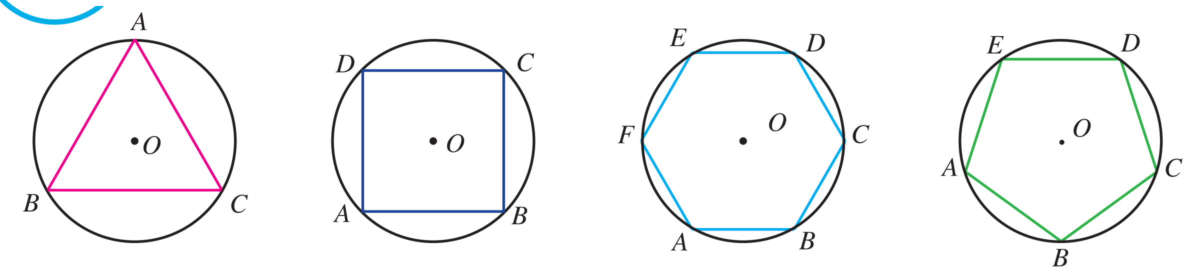
Application 2

ABCDEFGH est un cube. Dessine la pyramide de sommet *E* et de base *ABD*.

Le segment [*EA*] est-il la hauteur de cette pyramide ? Justifie.



2 POLYGONE RÉGULIER



Un polygone est dit régulier si tous ses côtés sont isométriques et tous ses angles sont égaux.

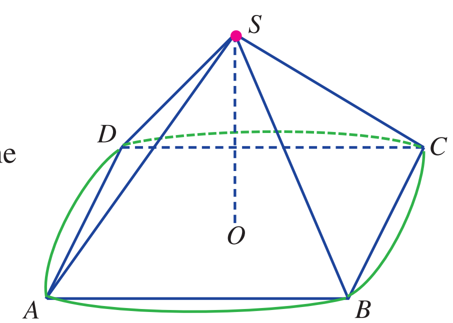
Remarques

⊙ Tout polygone régulier est inscrit dans un cercle.

⊙ Le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers.

⊙ Le centre O du cercle circonscrit au polygone régulier est le centre de ce polygone.

3 PYRAMIDE RÉGULIÈRE

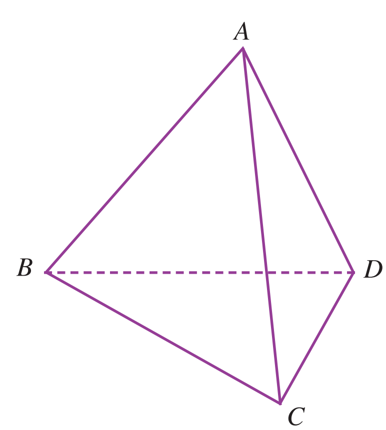


Une pyramide est dite régulière si la base est un polygone régulier et ses faces sont des triangles isocèles.

Remarques

Dans une pyramide régulière :
⊙ les faces sont des triangles isocèles superposables.
⊙ le segment joignant le sommet S au centre O de la base est le segment-hauteur.

4 TÉTRAÈDRE



Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.
Il est dit régulier si ses quatre faces sont des triangles équilatéraux.

5 AIRE D'UNE PYRAMIDE

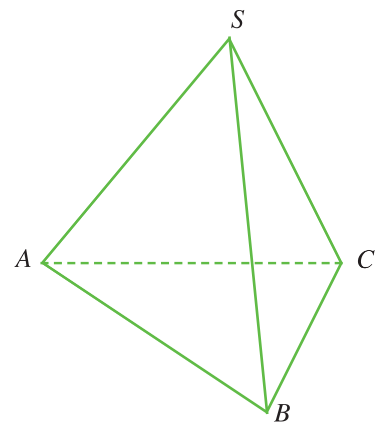
L'aire latérale $\mathscr{A}_\ell$ d'une pyramide est égale à la somme des aires des faces latérales.
L'aire totale $\mathscr{A}_t$ d'une pyramide est égale à la somme de son aire latérale et de l'aire de sa base.

Application 3

SABC est un tétraèdre régulier d'arête $SA = 6$ cm.

Vérifie que l'aire latérale de ce tétraèdre est le triple de l'aire du triangle *SAB*.

Vérifie que son aire totale est $36\sqrt{3}$ cm².



6 VOLUME D'UNE PYRAMIDE

Si V est le volume d'une pyramide, alors $\boxed{V = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}}$ où $\mathscr{B}$ est l'aire de sa base et h sa hauteur.

Application 4

Calcule la hauteur d'une pyramide ayant un volume de 64 cm³ et dont la base est un carré de côté 4 cm.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Réponds par vrai ou faux.

1°) Tout pavé droit est une pyramide.

2°) Le nombre des arêtes issues du sommet d'une pyramide est égal au nombre de ses faces latérales.

3°) Si les arêtes latérales d'une pyramide ont même longueur, elle est alors une pyramide régulière.

4°) Une pyramide régulière peut avoir un rectangle comme base.

5°) Les faces latérales d'une pyramide régulière sont toujours des triangles équilatéraux.

6°) Les bases de deux pyramides de même volume et de même hauteur sont superposables.

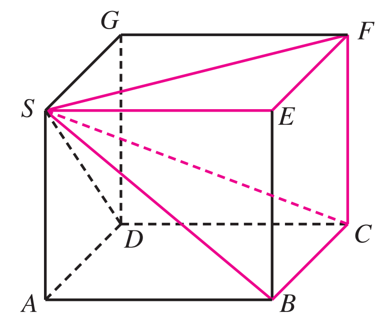
7°) Les bases de deux pyramides de même volume et de même hauteur ont la même aire latérale.

2 *ABCDSEFG* est un cube.

1º) Quel est le sommet de la pyramide *SABCD* ?

2º) Nomme les faces latérales de cette pyramide.

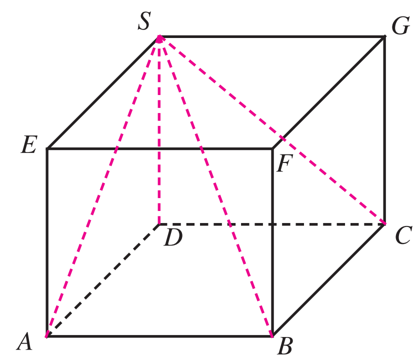
3º) Quelle est la hauteur de cette pyramide ?



3 *ABCDEFGH* est un pavé droit. Dessine les deux pyramides de même sommet *H* et de bases respectives les rectangles *ABFE* et *ABCD*.

Quelle est la face commune à ces deux pyramides ?

4 *ABCDEFGS* est un cube d'arête *AB* = 4 cm.
S est le sommet de la pyramide de base *ABCD*.
1º) Détermine les deux couples de faces superposables de cette pyramide.
2º) [*SD*] est-il le segment-hauteur de cette pyramide ?
3º) Calcule l'aire latérale et le volume de cette pyramide.

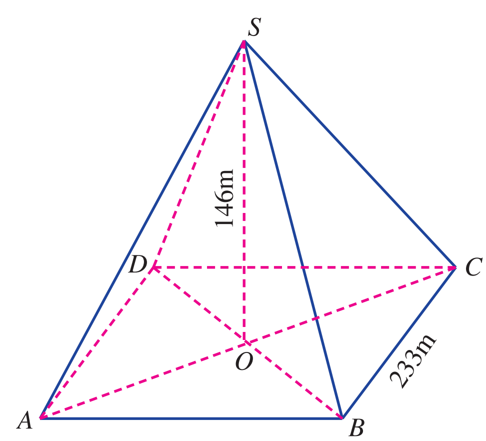


Pour chercher

5 La pyramide de Chéops est une pyramide régulière à base carrée de 233 m de côté et de hauteur 146 m.

A l'aide du théorème de Pythagore, montre que les arêtes [*SA*], [*SB*], [*SC*] et [*SD*] ont même longueur.

Calcule cette longueur.

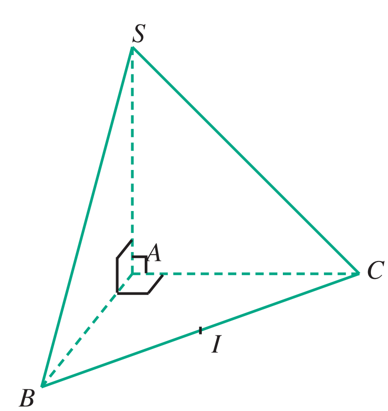


6 La base *ABC* de la pyramide *SABC* est un triangle rectangle en *A* et isocèle avec *AB* = 4 cm. [*SA*] est le segment hauteur de cette pyramide et *SA* = 4 cm.

1º) Calcule *SB*, *SC* et *BC*.

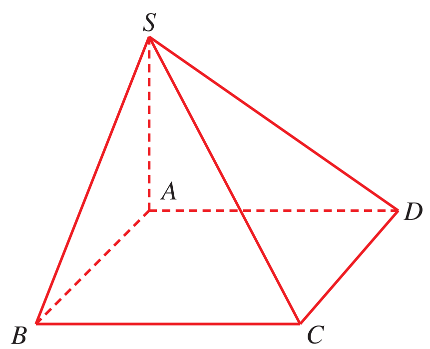
2º) Calcule *SI*, *I* étant le milieu de [*BC*].

3º) Calcule l'aire totale $\mathscr{A}_t$ et le volume *V* de cette pyramide.



TEST

1 *SABCD* est une pyramide de base rectangulaire et dont le segment - hauteur est [*SA*].



1º) Calcule le volume de cette pyramide si $AB = 4$ cm, $AD = 9$ cm et $SA = 5$ cm. **(5 points)**

2º) *I, J, K* et *L* sont les milieux respectifs de [*SA*], [*SB*], [*SC*] et [*SD*].
Quel est le sommet de la pyramide *SIJKL* et quelle est la nature de sa base ? **(5 points)**

26 CYLINDRE - CÔNE - SPHÈRE

Objectifs

1. Dessiner un cylindre, un cône, une sphère.

2. Calculer le volume d'un cylindre, d'un cône, d'une sphère.

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Cylindre de révolution

2. Cône de révolution

3. Sphère et boule

EXERCICES ET PROBLÈMES

TEST

1 CYLINDRE DE RÉVOLUTION

cylindre de révolution

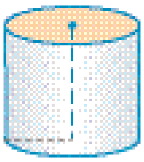


Fig. 1

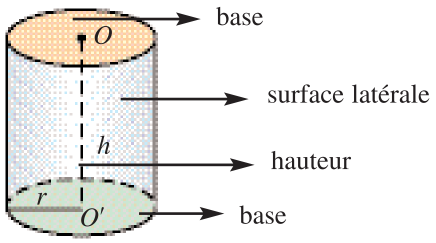


Fig. 2

Le cylindre de révolution est limité par deux disques superposables, appelés bases. O et O' sont les centres des disques. $[OO']$ est le segment hauteur.

L'aire latérale $\mathcal{A}_\ell$ du cylindre de révolution est :

$\boxed{\mathcal{A}_\ell = 2\,\pi r h}$ où r est le rayon de la base et h la hauteur du cylindre.

L'aire totale $\mathcal{A}_t$ du cylindre de révolution est la somme de son aire latérale et des aires des bases.

$\boxed{\mathcal{A}_t = 2\,\pi r h + 2\,\pi r^2}$

Le volume V du cylindre de révolution est :

$\boxed{V = \pi r^2 h}$

2 CÔNE DE RÉVOLUTION

cône de révolution

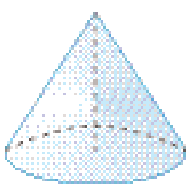


Fig. 3

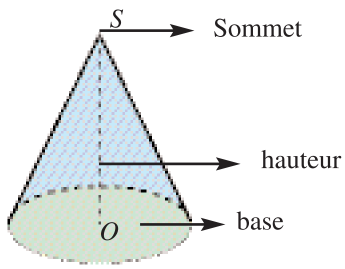


Fig. 4

La base d'un cône de révolution est un disque.
$[SO]$ est le segment-hauteur du cône de révolution, O étant le centre de la base et S le sommet de ce cône.
Le volume V du cône de révolution est :

$\boxed{V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}}$ où r est le rayon de la base et h la hauteur du cône.

3 SPHÈRE ET BOULE

Fig. 5

sphère

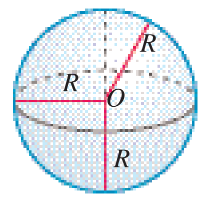


Fig. 6

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à O est égale à R.

Cette sphère sera notée $S\,(O, R)$.

La boule de centre O et de rayon R est le solide limité par la sphère $S\,(O, R)$.

Cette boule sera notée $B\,(O, R)$.

Le volume V de la boule de centre O et de rayon R est :

$$\boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3}}$$

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Réponds par vrai ou faux.

1°) La base d'un cylindre de révolution est un disque.

2°) Les deux bases d'un cylindre de révolution ont même rayon.

3°) Un cône et un cylindre de révolution ayant même hauteur et même base ont le même volume.

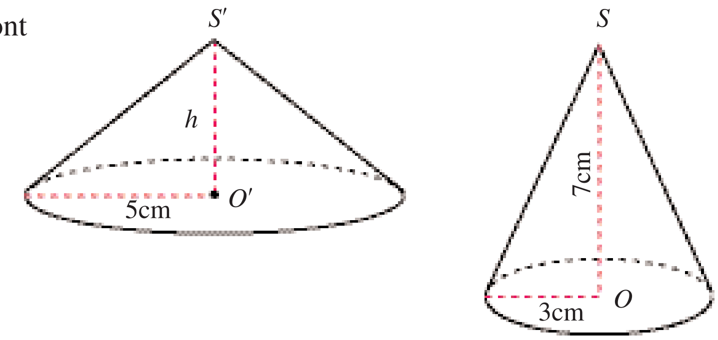
4°) Le volume de la boule $B\,(O, R)$ est la moitié de celui de la boule $B\,(O, 2R)$.

2 Calcule l'aire latérale $\mathcal{A}_\ell$ d'un cylindre de révolution de hauteur 10 cm et dont le rayon de la base est 20 cm.

3 Calcule le rayon de la boule de volume 113,04 cm^3 (prendre $\pi = 3{,}14$).

4 Les deux cônes de révolution ont le même volume.

Calcule h.



5 Quelle est l'aire de la base d'un cylindre de révolution de 1,2 m de hauteur et de volume 8,4 m^3 ?

6 Un bidon fermé aux deux extrémités a la forme d'un cylindre de révolution de 0,6 m de rayon et de 1,35 m de hauteur.

1º) Calcule sa contenance (volume) en litres ($1\ \ell = 1\ dm^3$).

2º) Calcule l'aire de la surface de tôle utilisée pour fabriquer ce bidon.

7 Un verre d'eau plein a la forme d'un cylindre de révolution de 5 cm de diamètre et de 8 cm de hauteur.

1º) Calcule le volume de l'eau.

2º) On y plonge une bille en acier de 3 cm de diamètre.

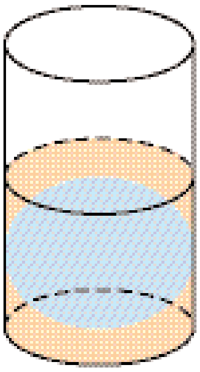
Quelle quantité d'eau déborde-t-elle ?

Pour chercher

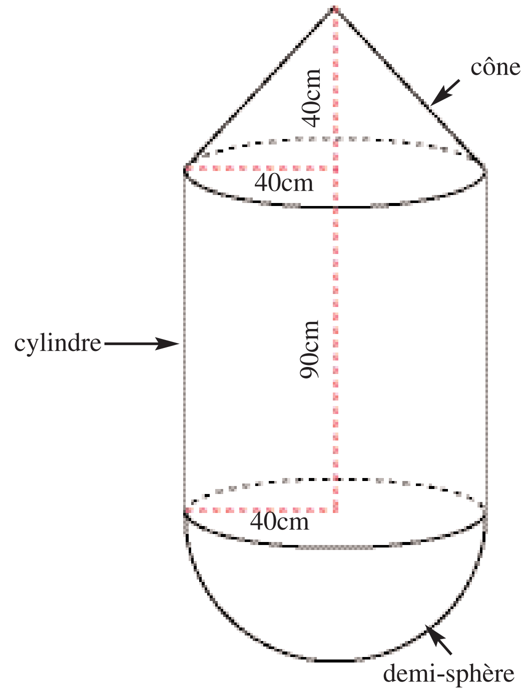
8 On plonge un glaçon sphérique de rayon 3 cm dans un verre cylindrique de rayon 3 cm contenant de l'eau.

Le glaçon repose au fond du verre et l'eau recouvre exactement le glaçon.

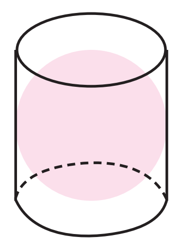
Quelle était la hauteur d'eau dans le verre ?



9 Calcule le volume correspondant à ce dessin.



10 Un ballon sphérique de 20 cm de diamètre est placé dans un cylindre de 20 cm de hauteur et de diamètre de base 20 cm.



Calcule :

1°) l'aire latérale $\mathscr{A}$ du cylindre.

2°) l'aire $\mathscr{A}'$ du ballon.

3°) Compare les deux aires.

4°) Calcule :

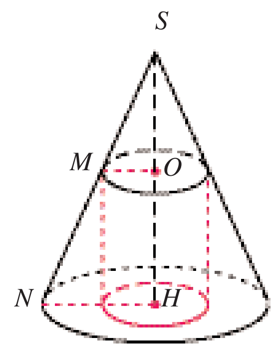
a) le volume $\mathscr{V}$ du cylindre.

b) le volume $\mathscr{V}'$ du ballon.

c) le quotient $\frac{\mathscr{V}}{\mathscr{V}'}$.

TEST

1 Dans cette figure, $[SH]$ est le segment-hauteur du cône de révolution et $[OH]$ est celui du cylindre de révolution.



On suppose que $SH = 7$ cm, $HN = 3$ cm et $SO = 3{,}5$ cm.

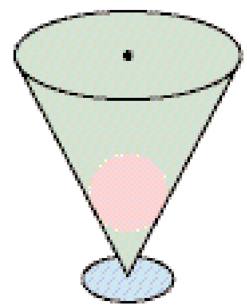
1º) Calcule OM, le rayon de la base du cylindre.

(2 points)

2º) Calcule le volume du cône et celui du cylindre.

(3 points)

2 Un verre plein d'eau a la forme d'un cône de révolution de hauteur 7 cm et de rayon 3 cm.
On plonge dans ce verre une boule en acier de 2 cm de rayon.



1º) Quelle quantité d'eau déborde-t-elle du verre ?

(2 points)

2º) Quelle quantité d'eau reste-t-il dans le verre ?

(3 points)