Résumé Maths – SE

Statistiques

- Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$
- Point moyen : $G(\bar{x}\ ;\ \bar{y}\ )$
- Nuage de points : l'ensemble des points $(x_i\ ; y_i)$
- Covariance : $cov\ (x; y) = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$
- Variance : $V(x) = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$
- Ecart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$
- Droite de régression : $\left(D{y}/_{x}\right)$: $y = ax + b$

  avec $a = \frac{cov(x;y)}{V(X)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

  Attention : La droite de régression passe par le point moyen : $G(\bar{x}\ ;\ \bar{y}\ )$
- Coefficient de corrélation : $r = \frac{cov(x;y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$

- Interprétation du coefficient de corrélation :

  × r est toujours compris entre -1 et 1
  × Si $= -1$, il y a une corrélation linéaire parfaite négative entre x et y.
  × Si $= 1$, il y a une corrélation linéaire parfaite positive entre x et y.
  × Si $r = 0$, il n'y a pas de corrélation entre x et y. Les deux variables sont indépendantes.

Corrélation	Négative	Positive
Faible	$-0{,}5 < r < 0$	$0 < r < 0{,}5$
Forte	$-1 < r < -0{,}5$	$0{,}5 < r < 1$

- Pourcentage d'augmentation : $\frac{valeur\ d'arrivée - Valeur\ de\ départ}{valeur\ de\ départ} \times 100$

- Pourcentage de diminution : $\frac{valeur\ de\ départ - Valeur\ d'arrivée}{valeur\ de\ départ} \times 100$

- Pourcentage d'erreur : $\frac{valeur\ réelle - Valeur\ estimée}{valeur\ réelle} \times 100$

Probabilité

Soit A et B deux évènements

I. Règles :

a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

b) $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

c) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ avec $\bar{A}$ l'évènement contraire de A

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

e) Si A et B sont deux évènements indépendants alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

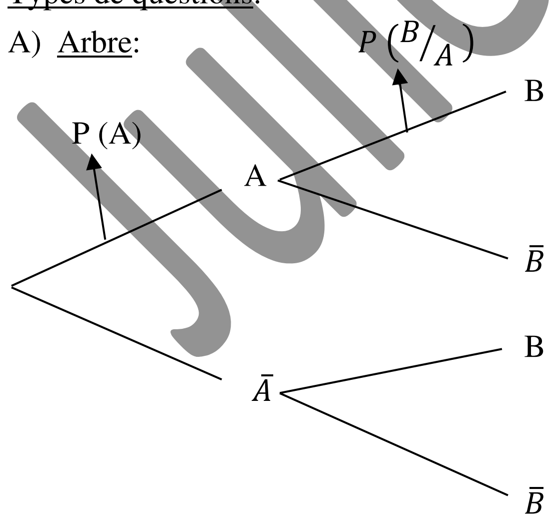
f) Si A et B sont deux évènements incompatibles alors $P(A \cap B) = 0$ et par conséquent $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

g) $P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

h) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

II. Types de questions:

A) Arbre:



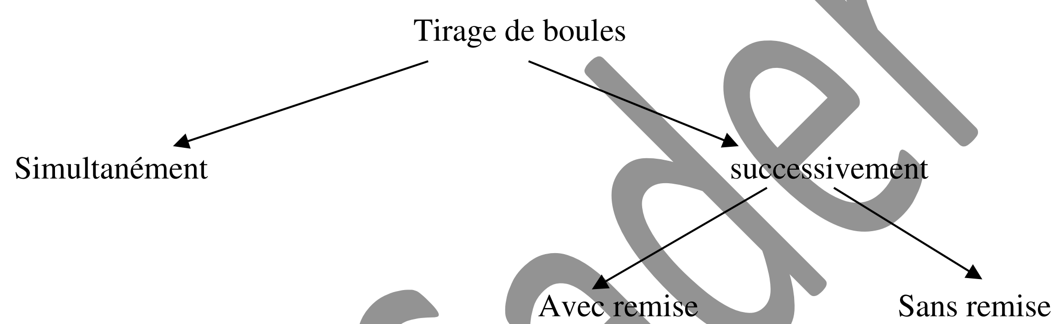
B) Tableau:

	X	Y	Total
A	1	3	4
B	5	6	11
Total	6	9	15

$P(A \cap X) = \frac{1}{15}$ $P(Y \cap B) = \frac{6}{15}$ $P(A) = \frac{4}{15}$ $P(Y) = \frac{9}{15}$

$P(A/X) = \frac{1}{6}$ $P(B/Y) = \frac{6}{9}$ $P(X/A) = \frac{1}{4}$ $P(Y/B) = \frac{6}{11}$

c) Urne :



Simultanément : C_n^p

Successivement avec remise : Le total reste le même chaque étape.

Successivement sans remise : Le total diminue de 1 à chaque étape.

III. Variable aléatoire :

a) La variable aléatoire $X = \{x_1 ; x_2 ; ...\}$.

b) Loi de probabilité :

x_i				
$P_i = P(X = x_i)$				

Avec $\sum P_i = 1$

c) Espérance mathématique : $E(X) = \sum P_i x_i$

d) Variance : $V(X) = \sum P_i {x_i}^2 - [E(X)]^2$

e) Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Suites numériques

Soit (U_n) une suite :

- Suites arithmétiques et suites géométriques :

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Pour démontrer que (U_n)	$U_{n+1} - U_n = \text{constante}$	$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{constante}$
Pour démontrer que (U_n) n'est pas	$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$	$\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$
Définition	$U_{n+1} - U_n = r$ (r raison)	$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ (q raison)
Propriété	$U_n = \frac{U_{n+1} + U_{n-1}}{2}$	$U_n^2 = U_{n+1} \times U_{n-1}$
Expression du terme général	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_p \times q^{n-p}$
Somme des termes	$S = \frac{\text{nombre de termes}}{2}(1^{\text{ier}}\text{ terme} + \text{dernier terme})$	$S = 1^{\text{ier}}\text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{nb des termes}}}{1-q}$

- Sens de variation :

Si $U_{n+1} - U_n > 0$ donc (U_n) est croissante.
Si $U_{n+1} - U_n < 0$ donc (U_n) est décroissante.
Si $U_{n+1} - U_n =$ donc (U_n) est constante.

- Si (U_n) est une suite arithmétique :
  Si $r > 0$ donc (U_n) est croissante.
  Si $r < 0$ donc (U_n) est décroissante.
  Si $r = 0$ donc (U_n) est constante.

- Si (U_n) est une suite géométrique :
  Si $U_0 > 0$ *et* $0 < q < 1$ donc (U_n) est décroissante.
  Si $U_0 < 0$ *et* $0 < q < 1$ donc (U_n) est croissante.
  Si $U_0 > 0$ *et* $q > 1$ donc (U_n) est croissante.
  Si $U_0 < 0$ *et* $q > 1$ donc (U_n) est décroissante.

Remarques :

$$Si\ 0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

$$Si\ a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$$

$$Si\ a < 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n\ n'existe\ pas$$

Intérêts simples

Un capital de base C_0 est placé à un taux annuel i (valeur décimale). Les intérêts simples sont donnés par $\boxed{I = C_0\, i\, n}$ où n est le nombre d'années de placement.

Remarques :

1) Si n est exprimé en mois alors l'intérêt $I = C_0 i \frac{n}{12}$
2) Si n est exprimé en jours alors l'intérêt $I = C_0 i \frac{n}{365}$

Le capital acquis au bout de n années à intérêts simples est : $\boxed{C_n = C_0 + I}$

Intérêts composés

I. Formule des intérêts composés :

- $C_n = C_0 \times (1 + i)^n$

  $avec\ i = \frac{r}{k}$ taux d'intérêts annuel

  nombre de périodes par an

  $et\ n = k \times t$

  Nombre d'années de capitalisation

- $I = C_n - C_0$

II. Périodes d'intérêt :

Période	Nombre de périodes par an : k
Annuelle	1
Semestrielle	2
Trimestrielle	4
Mensuelle	12
Hebdomadaire	52
Quotidienne	365
Par heure	8 760
Par minute	525 600

Annuités

I. Valeur acquise V_n :

La valeur acquise d'une suite d'annuités est donnée par :

$$\boxed{V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Avec : a est le montant d'annuités

$$n = k \times t$$

- n : nombre d'annuités
- k : nombre de périodes par an
- t : nombre d'années de capitalisation

$$i = \frac{r}{k}$$

- r : taux d'intérêt annuel
- i : intérêt pour une unité par période d'intérêt

II. Valeur actuelle V_0 :

La valeur actuelle d'une suite d'annuités est donnée par :

$$\boxed{V_0 = a \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}}$$

III. Intérêts :

$$\boxed{I = V_n - a \times n}$$

Fonction

1) Limites :

a) $+\infty + \infty = +\infty$

b) $-\infty - \infty = -\infty$

c) $K \times \infty = \infty$

d)$\frac{K}{\infty} = 0$

e) $\frac{K}{0} = \infty$

f) $\frac{\infty}{0} = \infty$

Formes indéterminées :

- $\frac{\infty}{\infty}$ on applique la règle de l'hôpital ($\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$)
- $\frac{0}{0}$ on applique la règle de l'hôpital ($\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$)
- $\infty - \infty$ Prendre un facteur commun
- $0 \times \infty$

2) Asymptotes :

- $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ alors $x = a$ est une asymptote verticale
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ alors $y = b$ est une asymptote horizontale
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ alors il y a une possibilité d'asymptote oblique

Pour démontrer que $(d): y = ax + b$ est une asymptote oblique on fait $\lim_{x \to \infty} [f(x) - f] = 0$

3) Position de la courbe (C) et de la droite (d) : $y = ax + b$

- $f(x) - y > 0$ alors (C) est au dessus de (d)
- $f(x) - y < 0$ alors (C) est au dessous de (d)
- $f(x) - y = 0$ alors (C) coupe (d)

4) Equation de la tangente au point A d'abscisse a :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

5) Dérivée :

a) $c' = 0$ (c est une constante)

b) $(x^n)' = nx^{n-1}$

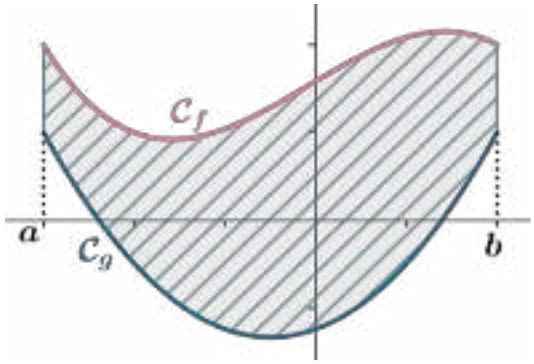
c) $(U^n)' = n\, U'U^{n-1}$

d) $(U\, V)' = U'V + V'U$

e) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

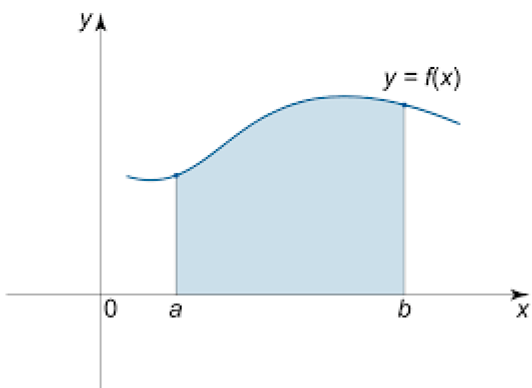
6) Calcul d'aire :

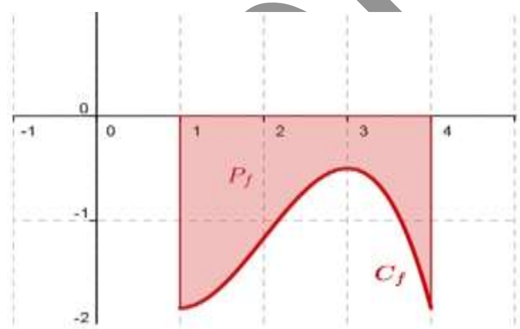
a) Aire du domaine compris entre deux courbes



$$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

b) Aire d'un domaine délimité par une courbe et l'axe des abscisses





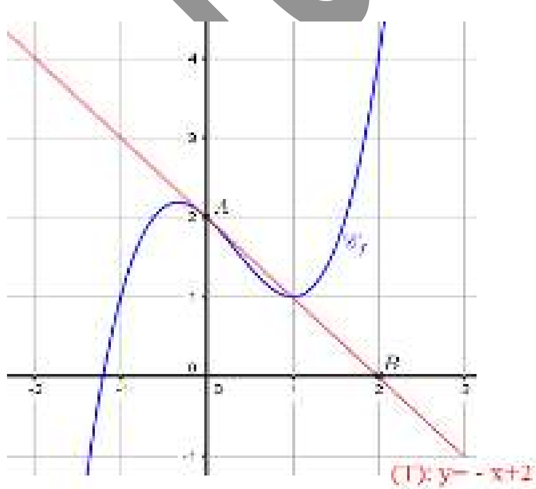
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

$$A = \int_1^4 -f(x)dx$$

7) Pour démontrer que f admet une solution unique $\propto$ tel que $a < \propto < b$

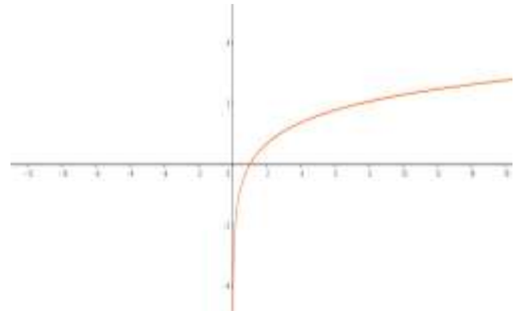
- f est continue sur [a ; b]
- f est strictement monotone sur]a ; b [
- $f(a) \times f(b) < 0$

8) <u>Lecture graphique :</u>



- $\mathrm{f}(0) = 2$, $\mathrm{f}(1) = 1$, $\mathrm{f}(2) = 4$
- f'(a) est la pente de la tangente au point d'abscisse a
  $f'(0) = -1$; $f'(1) = 0$

Fonctions logarithmes



- $\ln U$ existe si $U > 0$
- Si $0 < U < 1$ donc $\ln U < 0$
- Si $U > 1$ donc $\ln U > 0$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln(0^+) = -\infty$
- $\ln(+\infty) = +\infty$
- $(\ln|U|)' = \frac{U'}{U}$

Exemple :

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 3)$. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$

En particulier *:* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ *avec* $x > 0$

- $\int \frac{U'}{U} dx = \ln|U| + \text{c}$ (avec c une constante réelle)

Exemple :

$\int \frac{6x+5}{3x^2+5x} dx = \ln|3x^2 + 5x| + \text{c}$

En particulier *:* $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + \text{c}$, avec c une constante réelle

- Règles de calcul :

Logarithme d'un produit :

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ (avec a>0 et b>0)

Logarithme d'un quotient :

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ (avec a > 0 et b > 0)

En particulier : $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ (avec b > 0)

Logarithme d'une puissance :

$\ln a^b = b \times \ln a$ (avec $a > 0$)

Remarque :

La fonction logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle

- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$
- pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$

<u>Egalités et inégalités</u> :

- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ (car $\ln x$ est une fonction croissante)

- $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$ (car $\ln x$ est une fonction croissante)

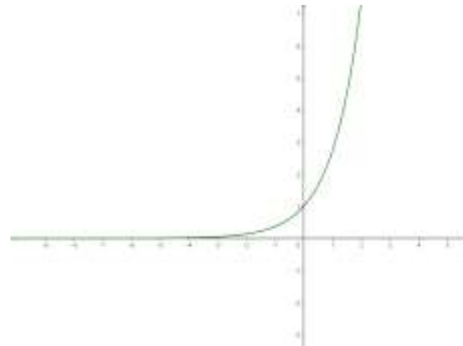
Soit $f(x) = \ln x$ et (C) sa courbe représentative

- $D_f =]0; +\infty[$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ ($x = 0$ $A.V$)
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$
- <u>T.V</u> :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Fonctions exponentielles

- $\forall\, U \in]-\infty;+\infty[\ , e^U > 0$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^{-\infty} = 0$
- $e^{+\infty} = +\infty$
- $(e^U)' = U'e^U$



Exemple :

Soit $f(x) = e^{x^2+3x}$

$f'(x) = (2x+3)\, e^{x^2+3x}$

En particulier *:*
$(e^x)' = e^x$

- $\int U'\, e^U\, dx = e^U$ + c (avec c une constante réelle)

Exemple :
$\int 2xe^{x^2-3}\, dx = e^{x^2-3}$ + c

En particulier **:** $\int e^x\, dx = e^x$ + c, avec c une constante réelle

- Règles de calcul :

Exponentielle d'une somme :
$e^x . e^{x'} = e^{x+x'}$
Exponentielle d'une différence :
$\frac{e^x}{e^{x'}} = e^{x-x'}$
Exponentielle du produit d'un réel par un rationnel :
$(e^x)^r = e^{r\,x}$

Egalités et inégalités :
➢ $e^x = e^y <=> x = y$ (car e^x est une fonction croissante)

➢ $e^x > e^y <=> x > y$ (car e^x est une fonction croissante)

Soit $f(x) = e^x$ et (C) sa courbe représentative

- $D_f =]-\infty ; +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad (y = 0 \ A.H)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $f'(x) = e^x > 0$
- T.V :

x	$-\infty$		$+\infty$
f ' (x)		+	
f(x)	0	$\nearrow$	$+\infty$

Fonction de l'économie et des sciences sociales

I. Fonctions de demande – Fonction d'offre – Equilibre du marché :

1) Fonction de demande :

La demande est la quantité d'un produit demandée par les acheteurs pour un prix donné. La fonction de demande est une fonction de prix.

- lorsque les prix augmentent la quantité demandée diminue : plus les prix sont élevés, moins les acheteurs sont disposés à acheter.
- lorsque les prix diminuent la quantité demandée augmente : moins les prix sont élevés, plus les acheteurs sont disposés à acheter.

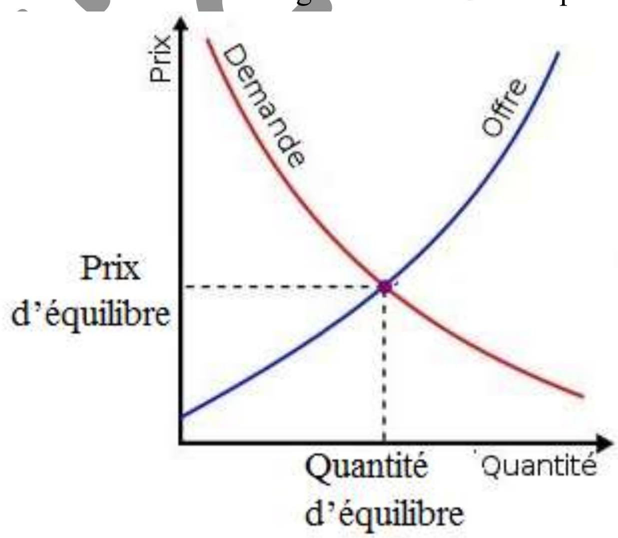
2) Fonction d'offre :

L'offre d'un bien est la quantité d'un produit offert à la vente par les vendeurs pour un prix donné. La fonction d'offre est une fonction de prix.

- lorsque les prix augmentent la quantité offerte augmente : les producteurs sont incités à offrir plus de biens
- lorsque les prix diminuent la quantité offerte diminue : les producteurs sont moins incités à produire.

3) Equilibre du marché

Dans le cas où la demande est égale à l'offre on dit que le marché est en équilibre



Exemple:

Si la fonction de demande d'un bien est donnée par $d(p) = 24 - p$ et la fonction d'offre du même bien est donnée par $O(p) = p + 10$ où p est le prix exprimé en milliers de L.L. Le marché est en équilibre lorsque $d(p) = O(p)$ donc $24 - p = p + 10$ d'où $p = 7$.

Le prix d'équilibre est donc 7 000 L.L. et la quantité d'équilibre est 17 unités ($d(7) = 24 - 7 = 17$ ou bien $O(7) = 7 + 10 = 17$)

II. Les fonctions de coûts :

On distingue 3 types de coûts : $\begin{cases} \text{Coût total} \\ \text{Coût moyen} \\ \text{Coût marginal} \end{cases}$

a) Coût total :
$C_T(q) = C_F + C_V(q)$

b) Coût moyen :
$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}$$

c) Coût marginal :
$C_m(q) = C_T{}'(q)$

Remarque : Le coût marginal est la variation du coût total due à une augmentation de la production d'une unité supplémentaire.

Exercice:
Une entreprise fabrique un bien. Le coût total de production est donné par $C_T(q) = \frac{1}{2}q^2 + q + 2$.
Calculer les coûts fixes, le coût moyen et le coût marginal.

- Coûts fixes $= C_F = C_T(0) = \frac{1}{2}0^2 + 0 + 2 = 2$
- Coût moyen$= C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q} = \frac{\frac{1}{2}q^2+q+2}{q} = \frac{1}{2}q + 1 + \frac{2}{q}$
- Coût marginal$= C_m(q) = C_T'(q) = q + 1$

III. Revenu :

On distingue 3 types de revenus : $\begin{cases} \text{revenu total} \\ \text{revenu moyen} \\ \text{revenu marginal} \end{cases}$

a) Revenu total :
$R_T(q) = \text{prix unitaire de vente} \times \text{quantités vendues}$

b) Revenu moyen :
$$R_M(q) = \frac{R_T(q)}{q}$$

c) Revenu marginal :
$R_m(q) = R_T{}'(q)$

Remarque : Le revenu marginal est l'augmentation du revenu résultant de la vente d'une unité supplémentaire.

Exercice :
Si le revenu total de q pantalons produits par une entreprise est donne par :
$R_T(q) = 5q^2 + 8q - 3$
Calculer le revenu moyen et le revenu marginal.

- Revenu moyen= $R_M(q) = \frac{R_T(q)}{q} = \frac{5q^2+8q-3}{q} = 5q + 8 - \frac{3}{q}$
- Revenu marginal= $R_m(q) = R'_T(q) = 10\,q + 8$

IV. Profit :

On distingue 3 types de profit : $\begin{cases} profit\ total \\ profit\ moyen \\ profit\ marginal \end{cases}$

a) Profit total :
$P_T(q) = R_T(q) - C_T(q)$

- $P_T(q) > 0$ *il y a un gain*
- $P_T(q) < 0$ *il y a une perte*
- $P_T(q) = 0$ *il n'y a ni gain ni perte*

b) Profit moyen :
$$P_M(q) = \frac{P_T(q)}{q}$$

c) Profit marginal :
$P_m(q) = P_T{}'(q)$

Remarque : Le profit marginal est l'augmentation du profit résultant de la vente d'une unité supplémentaire.

Exercice :
Dans une entreprise, on a observé que pour un produit donné, le coût total $C_T(q)$ (en milliers de livres libanaises) de la production de q tonnes de ce produit est $C_T(q) = q^2 - 4q + 5$ et le revenu total $R_T(q)$ est défini par $R_T(q) = 2q + 1$.
Calculer le profit total, le profit moyen, le profit marginal et le profit maximal.

- Profit total = $P_T(q) = R_T(q) - C_T(q) = -q^2 + 6q - 4$
- Profit moyen = $P_M(q) = \frac{P_T(q)}{q} = \frac{-q^2+6q-4}{q} = -q + 6 - \frac{4}{q}$

- Profit marginal = $P_m(q) = P_T'(q) = -2q + 6$
- Profit maximal
  $P_T'(q) = 0$ donc $-2q + 6 = 0$ alors $q = 3$

q	0		3		$+\infty$
$P_T{}'(q)$		+	0	$-$	
$P_T(q)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ce profit maximal est donc obtenu pour une production de 3 tonnes.

$P_T(3) = -3^2 + 6 \times 3 - 4 = 5$ le profit maximal est donc 5 000 L.L.

V. <u>Elasticité de la demande</u> :

Soit d la fonction de demande d'un produit pour un prix donné, la valeur da la demande est $d(p)$.si ce prix augmente de 1% alors la demande $d(p)$ subit une diminution de e %. e s'appelle l'élasticité de la demande par rapport au prix p.

$$e(p) = p \times \frac{d'(p)}{d(p)}$$

Pour un prix p_0 ,

- Si $e(p_0) < -1$, on dit que la demande est élastique. Cela signifie que la réaction des consommateurs par rapport à la variation du prix est considérable.
- Si $-1 < e(p_0) < 0$, on dit que la demande est inélastique. Cela signifie que la réaction des consommateurs par rapport à la variation du prix est plus ou moins faible.
- Si $e(p_0) = -1$, on dit que la demande a une élasticité unitaire.
- Si $e(p_0) = 0$, on dit que la demande est parfaitement inélastique.

<u>Exercice :</u>

La fonction de demande, en unités, d'un certain produit est donnée par

$d(p) = 200 - 2p$ pour $10 \leq p \leq 100$ avec p exprimé en milliers de L.L.

a) Trouver l'élasticité de la demande $e(p)$.
b) Calculer $e(25)$. La demande est – elle élastique pour p=25 ?
   Interpréter le résultat.

a) $e(p) = p \times \frac{d\prime(p)}{d(p)} = p \times \frac{-2}{200-2p} = \frac{-2p}{200-2p} = \frac{-2p}{2(100-p)} = \frac{-p}{100-p} = \frac{p}{p-100}$

b) $e(25) = \frac{25}{25-100} = \frac{25}{-75} = -\frac{1}{3}$

$-1 < e(25) < 0$ alors la demande est inélastique.

Interprétation : A partir du prix 25 000 L.L., si le prix augmente de 1% la demande diminue de $\frac{1}{3}$ %

VI. Amortissement :

Certains biens ou matériaux subissent chaque année une perte de leur valeur qu'on appelle **amortissement**. La durée de vie est appelée vie utile « n ».A la fin de la vie utile, le matériel aura une valeur « r » appelée valeur résiduelle. Soit C le coût initial de ce bien alors l'amortissement total est $C - r$ et l'amortissement annuel est $a = \frac{C-r}{n}$

Exercice :

Jad achète une voiture à 30 000 000 L.L. La vie utile de cette voiture est supposée de 6 années et sa valeur estimée à la fin de la 6^{ieme} année est 12 000 000 L.L.
Calculer l'amortissement total et l'amortissement annuel.

$C = 30\ 000\ 000\ L.L.$
$n = 6\ années$
$r = 12\ 000\ 000\ L.L.$

L'amortissement total est $C - r = 30\ 000\ 000 - 12\ 000\ 000 = 18\ 000\ 000\ L.L.$
L'amortissement annuel est $a = \frac{C-r}{n} = \frac{30\ 000\ 000-12\ 000\ 000}{6} = 3\ 000\ 000\ L.L.$