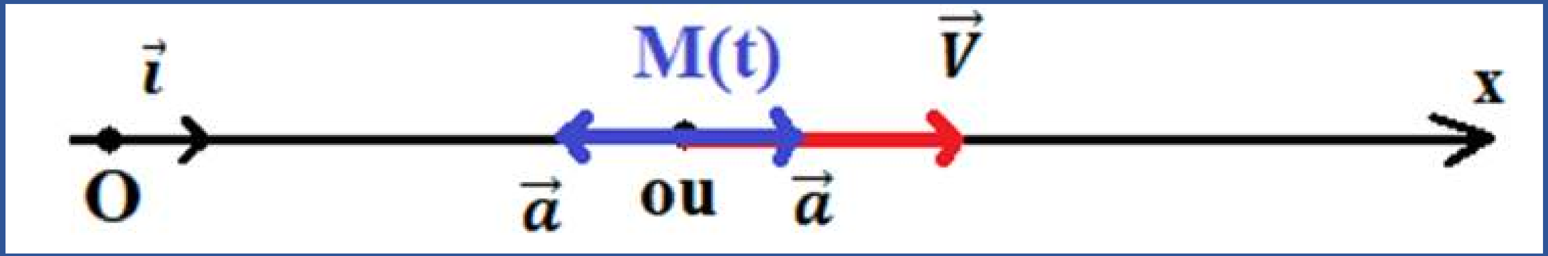
Etude de quelques mouvements simples

ZAHI FARHAT

INTRODUCTION

Mouvement rectiligne donc le mouvement est unidimensionnel sur $\overrightarrow{x'x}$



<u>Repère d'espace :</u> (O ;$\vec{i}$)

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$$

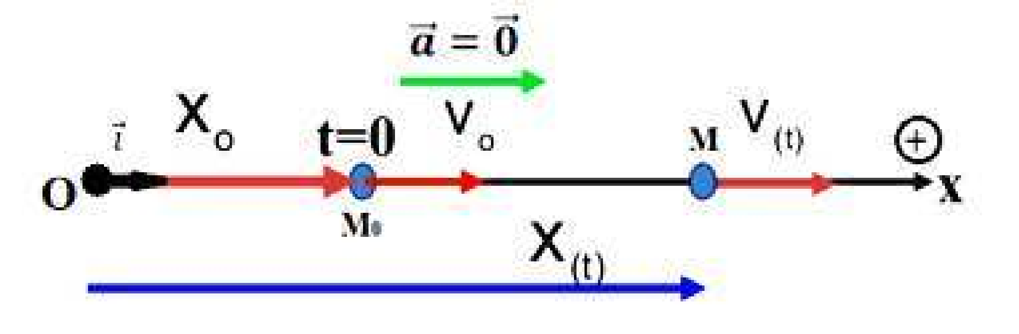
$$\vec{V} = (\overrightarrow{OM})' = x'.\vec{i} = V_x.\vec{i}$$

$$\vec{a} = (\vec{V})' \text{ donc } a = a_x.\,\vec{i} = x''.\vec{i} \quad \text{et } \vec{a} = \vec{a}_t$$

ZAHI FARHAT

ZAHI FARHAT

A) Mouvement rectiligne uniforme : MRU



1) Définition : un mouvement est dit rectiligne uniforme lorsque l'équation horaire est de 1er degré : $x = Vt + x_o$

Le vecteur vitesse est constant (la réciproque est vraie)

$$MRU \Leftrightarrow \vec{V} = \overrightarrow{cte}$$

$$\vec{V} = V\vec{i} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow V = cte\ (\text{algébrique})$$

2) Equation horaire du mouvement :

$$\vec{V} = x'\vec{i} = \overrightarrow{cte} = V\vec{i} \Rightarrow x' = V = cte$$

$$x = \overline{OM} : \textit{Abscisse de } M$$

$$V = cte \xrightarrow{prim} x = Vt + x_o$$

($x_o = \overline{OM_0}$:abscisse initiale du mobile à l'instant t_0)

Dans un mouvement rectiligne uniforme MRU :

x est une fonction linéaire du temps.

3) Accélération :

$$\left.\begin{matrix}\vec{a} = x''\vec{i} = V'\vec{i} = a\vec{i} \\ V = cte \Rightarrow V' = 0\end{matrix}\right. \Rightarrow \vec{a} = \vec{o}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t \ \{car\ \overrightarrow{a_n} = 0\ (\rho \rightarrow \infty)\}$$

$$et\ a_t = V' = a$$

$$MRU \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

4) Formule :

$x = Vt + x_o$; $V = cte$ et $a = 0$.

$d = x - x_0 = V.t$: La distance parcourue

Remarque :

Avant d'utiliser ces formules, il faut choisir un repère d'espace et un repère de temps.

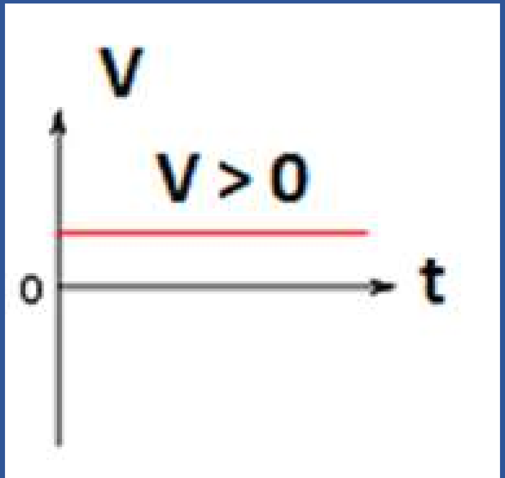
Cas particulier : Si on choisit l'origine du repère d'espace confondu avec la position initiale du mobile $\Rightarrow x_o = 0$

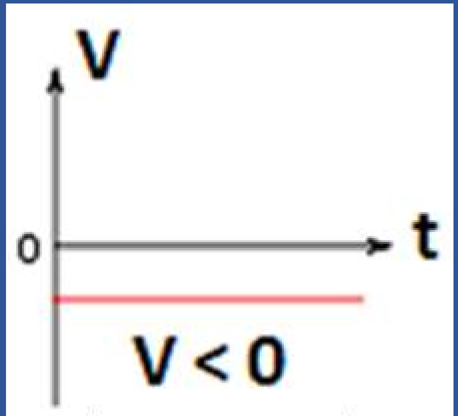
Formules : $d = x = Vt$; $V = cte$ et $a = 0$

5) Diagrammes :

a) Diagramme des vitesses en fonction du temps :

$V = cte \Rightarrow$ Le diagramme des vitesses est une ligne droite parallèle à l’axe des temps.



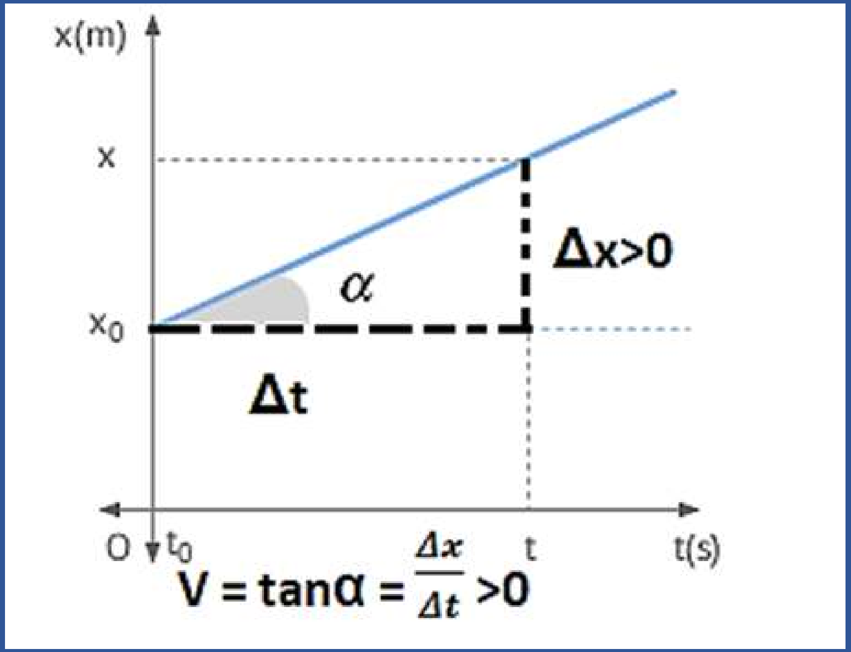


$\vec{V}$ est opposé à $\vec{i}$

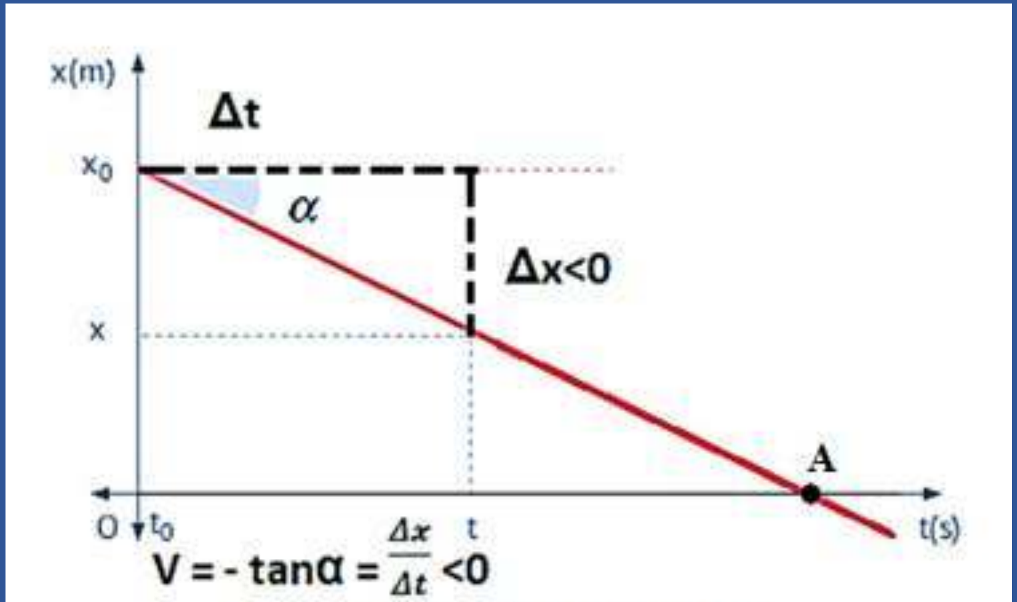
b) Diagramme des espaces en fonction du temps :

$x = Vt + x_o \Rightarrow$ Le diagramme des espaces est une ligne droite. Cette ligne droite est:

- croissante si $V > 0$



- décroissante *si* $V < 0$



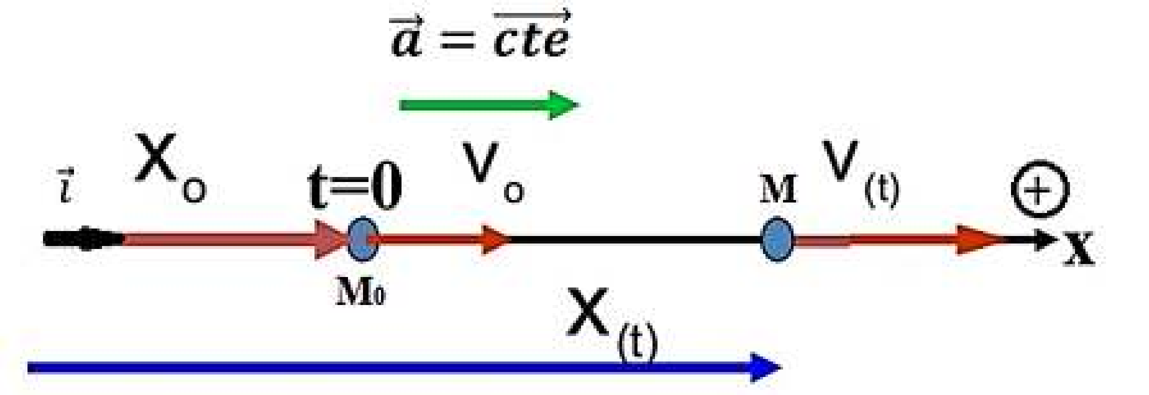
En A : le mobile arrive en O

Le coefficient directeur de cette droite = V.

ZAHI FARHAT

B) Mouvement rectiligne uniformément varié : M.R.U.V

On pose : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} \Rightarrow \overline{OM} = x$ (abscisse à l'instant t)



Mouvement rectiligne : $a_n = \frac{v^2}{\rho \longrightarrow \infty} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a_t}$

Donc $\vec{a}$ est porté par la droite trajectoire et $a = a_t = V'$

1) Définition :

$MRUV \Leftrightarrow \vec{a} = \overrightarrow{cte}$

L'équation horaire est de 2nd degré:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$$

2) Vitesse :

$$V' = a = cte \overset{prim}{\Longrightarrow} V = at + V_0$$

V_0 : vitesse initiale à l'instant t_0

Dans un mouvement MRUV :

V est une fonction linéaire du temps.

3) Equation horaire du mouvement :

$$\vec{V} = x'\vec{\imath} \Rightarrow x' = V = at + V_0$$

$$\overset{prim}{\Longrightarrow} x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$$

$x_0 = \overline{OM_0}$ Abscisse initiale à l'instant t_0

Dans un MRUV :

x est une fonction du 2nd degré % au temps.

ZAHI FARHAT

4) Relation entre x et V :

(on trouve t en fonction de V puis on la remplace dans x)

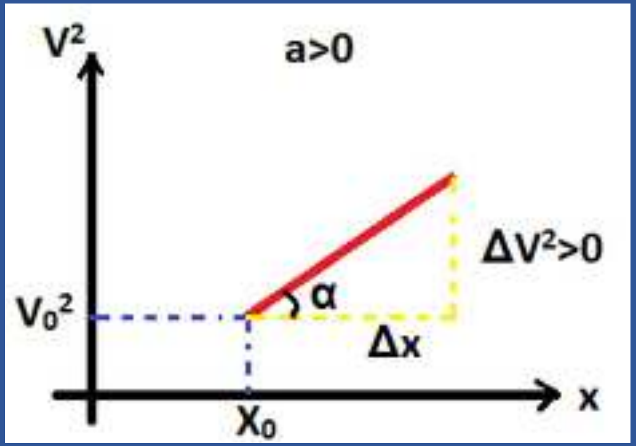
$$V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$$

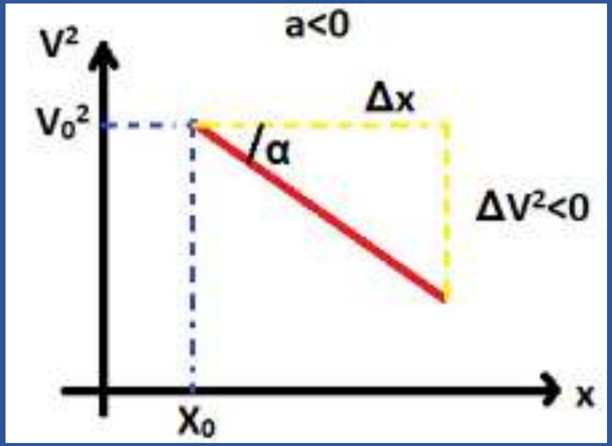
Dans un $M.R.U.V$: V^2 est proportionnelle à x

$\Rightarrow$ le diagramme de V^2 en fonction de x est une ligne droite:

Le coefficient directeur de cette droite $= 2a$.

$$a = \frac{tg \propto}{2} = \frac{1}{2}\frac{\Delta(V^2)}{\Delta x} > 0 \qquad a = -\frac{tg \propto}{2} = \frac{1}{2}\frac{\Delta(V^2)}{\Delta x} < 0$$





- Croissante si $a > 0$
- Décroissante si $a < 0$

5) Formule :

ZAHI FARHAT

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \quad ; \quad V = at + V_0 \ ;$$

$$a = cte \text{ et } V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$$

La distance parcourue d = $x - x_0$

$$d = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$$

ou

$$d = \frac{V^2 - V_0{}^2}{2a}$$

Remarque :

Avant d'utiliser ces formules, il faut choisir un repère d'espace et un repère de temps.

A partir de ce choix, on déduit les valeurs de x_0 et de V_0.

Cas particulier :

si on choisit l'origine 0 du repère d'espace confondu avec la position initiale du mobile $\Rightarrow x_0 = 0$ et comme origine des temps l'instant où le mobile part du repos $\Rightarrow V_0 = 0$

Formules : $x = \frac{1}{2}at^2$; $V = at$; $a = cte$ et $V^2 = 2ax$

$$d = x = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ou} \quad d = \frac{V^2}{2a}$$

6) Etude du mouvement :

$MRUA \Leftrightarrow$ $\vec{a} = \overrightarrow{cte}$ et $\vec{V}$ et $\vec{a}$ de même sens $\Rightarrow V.a > 0$

$MRUR \Leftrightarrow$ $\vec{a} = \overrightarrow{cte}$ et $\vec{V}$ et $\vec{a}$ de sens contraire $\Rightarrow V.a < 0$

Orientons la trajectoire dans le sens de $\overrightarrow{V_0} \Rightarrow V_0 > 0$

1er cas :

Le cas où $a = cte > 0$

$\Rightarrow a.V_0 > 0 \Rightarrow \vec{a}$ et $\overrightarrow{V_0}$ de même sens.

t	$0 \qquad\qquad +\infty$
$V = at + V_0$	$V_0 > 0 \nearrow +\infty$ ⊕
a	+
Va	+
Résultat	M.R.U.A

Conclusion :

Dans le cas où $a.V_0 > 0$ avec $a = cte$:

le mouvement est $MRUA$.

2ème cas :

le cas où $a = cte < 0 \Rightarrow aV_0 < 0$

$\Rightarrow \vec{a}$ et $\overrightarrow{V_0}$ de sens contraire.

t	0	$t_1 = -\frac{V_0}{a}$	$+\infty$
$V = at + V_0$	$V_0 > 0 \searrow$ ⊕	0	$\searrow -\infty$ ⊖
a	–		–
Va	–		+
Résultat	$M.R.U.R.$		$M.R.U.A.$

Rebrousse chemin

Conclusion : Dans le cas où où $a.V_0 < 0$ avec $a = cte$: le mouvement est formé de 2 phases.

- la 1ère phase (pour $t < t_1$) est la phase d'aller son mouvement est M.R.U.R.
- la 2ème phase ($t > t_1$) est la phase de retour son mouvement est M.R.U.A.
- pour $t = t_1$: le mobile rebrousse chemin.

ZAHI FARHAT

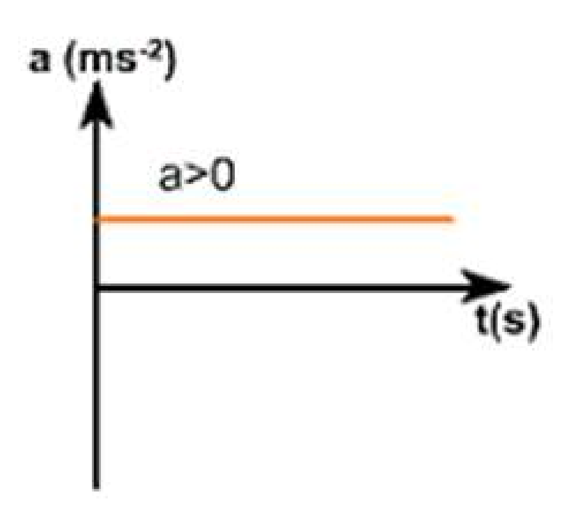
7) Diagramme en fonction du temps :

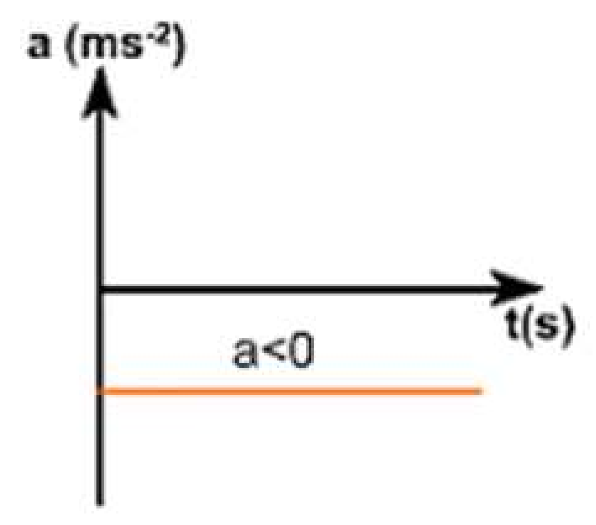
ZAHI FARHAT

a) Diagramme des accélérations :

$$a = cte$$

⇒ Le diagramme des accélérations est une ligne droite parallèle à l'axe des temps.



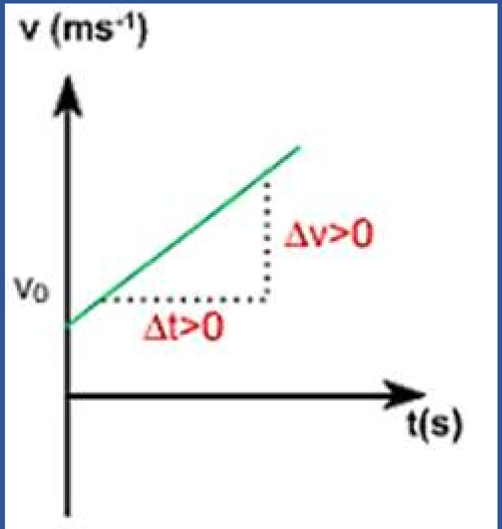


b) Diagramme des vitesses :

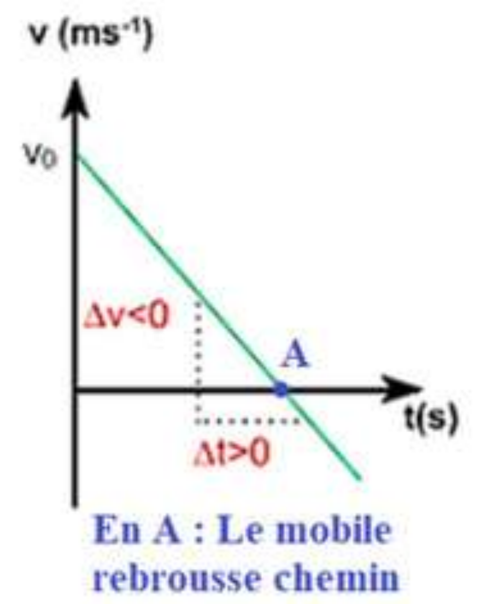
$$V = at + V_0$$

⇒ Le diagramme des vitesses est une ligne droite :

$$a = tg \propto = \frac{\Delta V}{\Delta t} = cte > 0 \qquad a = -tg \propto = \frac{\Delta V}{\Delta t} = cte < 0$$



- Croissante si $a > 0$



- Décroissante si $a < 0$

c) Diagramme des élongations :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$$

⇒le diagramme de $x(t)$ est une parabole de sommet S.

Les coordonnées de S :

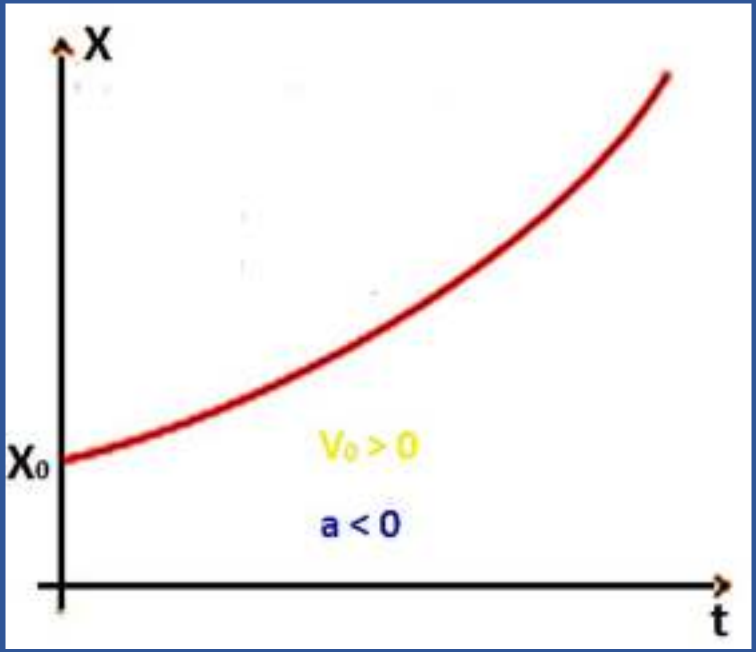
$$t_S = -\frac{V_0}{a}$$

et

$$x_S = \frac{4\left(\frac{1}{2}a\right)x_0 - V_0^2}{2a} = \frac{2ax_0 - V_0^2}{2a}$$

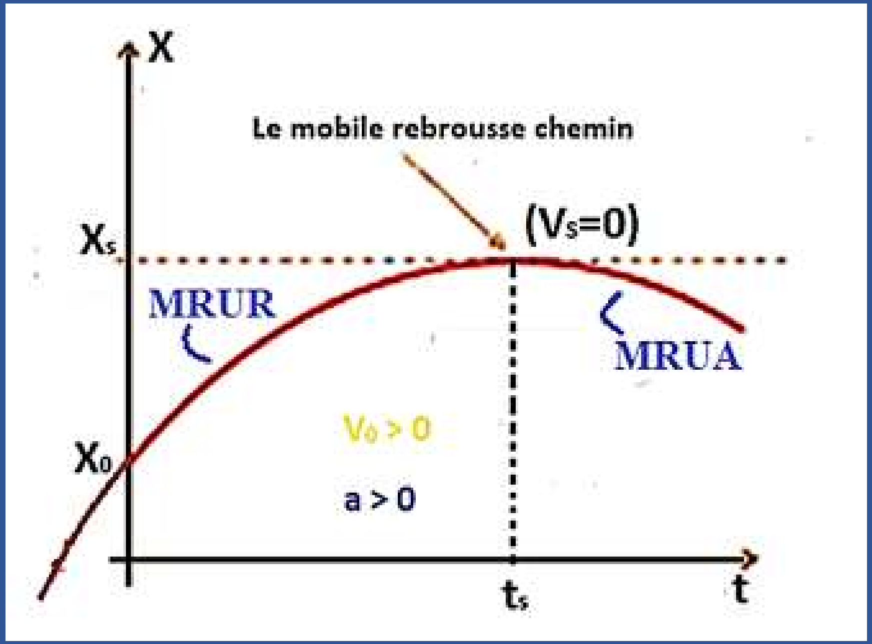
La droite $t_S = -\frac{V_0}{a}$: droite de symétrie de la parabole.

Le cas où $a > 0$ et $V_0 > 0$



- Si $a < 0$: S est le maximum de la parabole.

Le cas où $a < 0$ et $V_0 > 0$



- Si $a > 0$: S est le minimum de la parabole.

ZAHI FARHAT

Exercices d’application:

Supp.vert

2-3-4/149

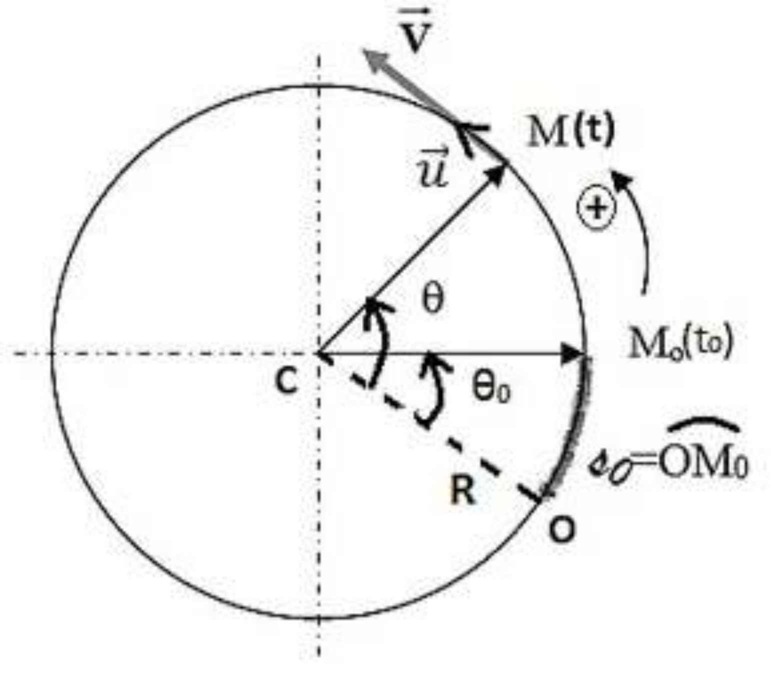
7-8/151

ZAHI FARHAT

C- Mouvement circulaire uniforme : M.C.U.

Soit M la position du mobile à l'instant t

M décrit un cercle C(c;R)



Le vecteur $\vec{V}$ tangente à la trajectoire et a le sens du mouvement.

1) **Définition** :

$$M.C.U. \Leftrightarrow \begin{cases} la\ trajectoire\ est\ une\ circonfirence \\ et \\ V = cte\ (Valeur\ algébrique) \end{cases}$$

Remarque :

Dans un $M.C.U.$: $\vec{V} \neq \overrightarrow{cte}$ car la direction de $\vec{V}$ change au cours du temps.

2) Repérage en abscisse curviligne $s = \widehat{OM}$:

$$\vec{V} = s'\vec{u} \Rightarrow s' = V = cte$$

$$\xRightarrow{prim} s = Vt + s_0$$

Equation horaire linéaire

$s_0 = \widehat{OM_0}$: abscisse curviligne à l'instant t_0

s= $\widehat{OM}$ abscisse curviligne à l'instant t

Dans un $M.C.U$:

s est une fonction linéaire du temps

Cas particulier :

si on choisit l'origine 0 de la trajectoire confondue avec $M_0 \Rightarrow s_0 = 0$ Donc : $s = Vt$

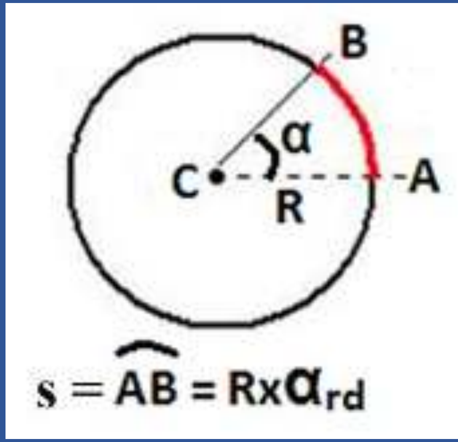
Dans le SI : $V en\ (m/s)$; $t\ en\ (s)$; $s\ et\ s_1 en\ (m)$

ZAHI FARHAT

3) Repérage en abscisse angulaire $\theta = \widehat{OCM}$

Dans le SI : θ ou α s'exprime en rd.

Relation entre s et θ :



$$s = R.\theta_{rd} \Rightarrow \ \theta = \frac{s}{R}$$

donc: $\theta = \frac{V}{R}t + \frac{s_0}{R}$

Equation horaire angulaire

On pose $\frac{s_0}{R} = \theta_0$: abscisse angulaire initial c.à.d. abscisse angulaire à l'instant t_0

$$\theta = \frac{V}{R}t + \theta_0 \Rightarrow$$

Dans un M.C.U : θ est une fonction linéaire du temps.

Vitesse angulaire :

Pendant $\Delta t = t_2 - t_1$, l'angle parcouru est $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$

$\theta'_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$: vitesse angulaire moyenne

si $\Delta t \rightarrow 0$; $\theta'_m \rightarrow \theta'_i$

$$\theta' = \lim_{\Delta t \to 0} \theta'_m = \frac{d\theta}{dt}$$

La dérivée de θ % au temps : $\frac{d\theta}{dt} = \theta' = \omega$

θ′ s'appelle la vitesse angulaire en rd/s dans le SI.

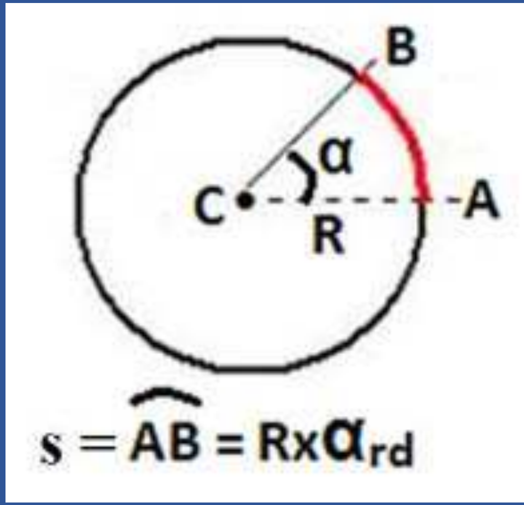
$$s = R\theta \Rightarrow s' = V = R\theta' = R\omega$$

$$\Rightarrow \theta' = \omega = \frac{V}{R} = cte$$

Dans un $M.C.U$: $\theta' = \omega = $ cte

Donc : $\theta = \omega t + \theta_0$

4) Période T et fréquence N :



T → $2\pi R$

1s → s' = V = $\frac{2\pi R}{T}$

Or θ' = $\frac{s'}{R}$; donc: θ' = ω = $\frac{2\pi}{T}$

La durée d'un tour complet :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = cte$$

⇒ Ce mouvement est périodique

et sa période de $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Dans le SI :

T en (s) et ω en (rd/s).

Donc la période T d'un M.C.U = Durée de 1 tour complet

La fréquence de ce mouvement :

$$N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = cte$$

Donc: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N$

La fréquence N représente le nombre de tours/s.

Dans le SI :

T en (s) ; ω en (rd/s) ; N en (Hz) ou en (tr/s)

ZAHI FARHAT

5) Vecteur accélération $\vec{a}$. (Linéaire)

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} \text{ Avec } a_t = V'$$

Or dans le M.C.U : $V = cte$

Donc dans le M.C.U :

$$a_t = 0 \Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{a_n}$$

Alors $\vec{a}$ est porté par la normale à la trajectoire et orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire (radiale centripète) et puisque la trajectoire est un cercle

$$\Rightarrow a = a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = cte$$

Remarque :

$\vec{a} \neq \overrightarrow{cte}$ Car sa direction change au cours du temps.

6) Accélération angulaire.

L'accélération angulaire :

θ'' = Dérivée seconde de θ% au temps.

$\theta'' = \frac{d\theta'}{dt}$ or $\theta' = \frac{V}{R}$ donc $\theta'' = \frac{V'}{R}$ tel que $V' = a_t$

Alors: $\theta'' = \frac{a_t}{R}$ ou $a_t = \theta''.R$

Dans le SI : θ'' s'exprime en (rd/s^2).

NB: Pour un M.C.U. : $\theta' = cte \Rightarrow \theta'' = 0$

7) Formules du M.C.U.

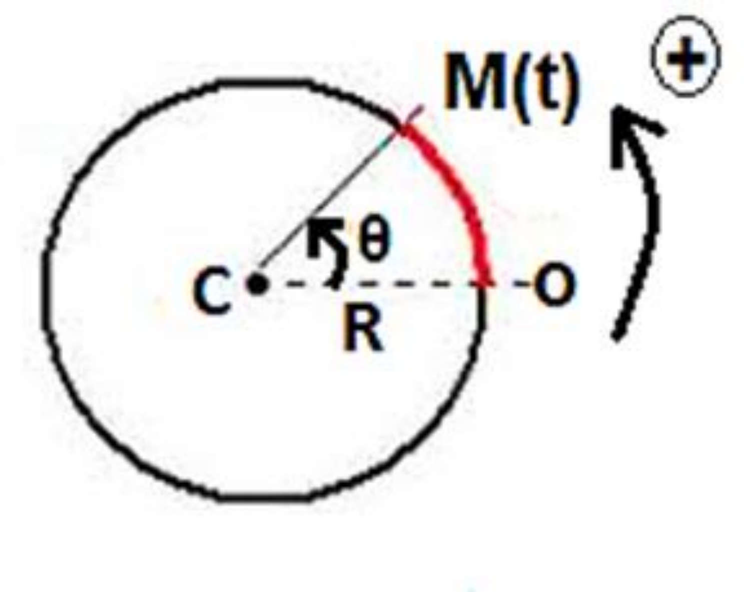
$V = cte$	$T = \frac{2\pi}{\omega}$ = Durée de 1 tour complet
$s = vt + s_0$	$N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ = Nombre de tour/s
$s = R\theta\ rd$	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N$
$V = R\theta' = R\omega \Rightarrow$ $\theta' = \omega = V/R = Cte$	$\vec{a}$ est centripète
$\theta = \omega t + \theta_0$	$a = a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = cte$

D- Mouvement circulaire uniformément varié. M.C.U.V

1) Définition :

M.C.U.V. ⇔ trajectoire est une circonférence avec :

$$\theta'' = \quad cte$$



Rem :

si on choisit le sens positif celui du mouvement :

- Lorsque $\theta'' = \quad cte \ > 0 \ \Rightarrow$ le mouvement est M.C.U.A.
- Lorsque $\theta'' = \quad cte \ < 0 \ \Rightarrow$ le mouvement est M.C.U.R.

2) Vitesse angulaire θ':

$$\theta'' = cte \quad \Rightarrow \quad \theta' = \theta'' t + \theta'_0$$

$\theta'_0 = cte$: vitesse angulaire initiale à l'instant t_0

Donc dans un M.C.U.V :

θ' est une fonction linéaire du temps

3) Equation horaire du mouvement :

$$\theta' = \theta'' t + \theta'_0 \ \Rightarrow \ \theta = \frac{1}{2}\theta'' \, t^2 + \theta'_0 t + \theta_0$$

Equation horaire angulaire

θ_0: abscisse angulaire initial c.à.d. à l'instant t_0

Dans un M.C.U.V:

θ est une fonction du 2nd degré % au temps.

ZAHI FARHAT

4) Relation entre θ et θ':

$$\theta'^2 - \theta_0'^2 = 2\theta'' (\theta - \theta_0)$$

Dans un M.C.U.V :

θ'^2 **est proportionnelle à** θ.

5) Formules :

$$\theta = \frac{1}{2}\theta'' t^2 + \theta_0' t + \theta_0$$

$$\theta' = \theta'' t + \theta_0'$$

$$\theta'' = cte$$

$$\theta'^2 - \theta_0'^2 = 2\theta''(\theta - \theta_0)$$

6) L'angle balayé :

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\theta'' t^2 + \theta'_0 t$$

$$\Delta\theta = \frac{\theta'^2 - \theta'_0{}^2}{2\theta''}$$

NB :

- **La longueur de l'arc circulaire parcouru est : $s - s_0 = R(\theta - \theta_0)$**
- **$\theta - \theta_0 = 2\pi n_{rd} / n$: le nombre de tours entre t et t_0 ($n \in \mathbb{R}$)**

Tableau de correspondance entre le M.R.U.V et M.C.U.V

M.R.U.V	M.C.U.V.
x	θ
V	θ'
a	θ''
x_0 ; V_0	θ_0 ; θ'_0
$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$	$\theta = \frac{1}{2}\theta'' t^2 + \theta'_0 t + \theta_0$
$V = at + V_0$	$\theta' = \theta'' t + \theta'_0$
$a = cte$	$\theta'' = cte$
$V^2 - V_0^2 = 2a\,(x - x_0)$	$\theta'^2 - \theta_0'^2 = 2\theta''(\theta - \theta_0)$

ZAHI FARHAT

Exercices d'application:

10-11/152

14-15/153

Supp.vert

16/154

20/155

ZAHI FARHAT