Fonctions.

Partie I

Soit a et b deux nombres réels. La fonction φ est définie sur R par :$\varphi(x)=(ax+b)e^{-x}$.

1. a. Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

   b. Vérifier que, pour tout réel x: $\varphi(x)=-\varphi''(x)-2\varphi'(x)$.

2. Démontrer que φ admet une primitiveΦ, définie sur R par :$\Phi(x)=(Ax+B)e^{-x}$ où

   A et B sont des nombres réels que l'on exprimera à l'aide de a et b.

3. Déterminer a et b pour que :$\varphi(0)=5$ et $\varphi'(0)=-3$.Donner alors$\varphi'(x)$,$\varphi''(x)$ et$\Phi(x)$.

Partie II

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 1 cm sur l'axe des ordonnées. Soit f la fonction définie sur R par :

$f(x)=(2x+5)e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.Donner une interprétation graphique de

   cette deuxième limite.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) avec les axes

   du repère.

3. Calculer $f'(x)$, déterminer le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la

   Fonction f.

4. Soit I le point de la courbe (C) d'abscisse$-\frac{1}{2}$.Une équation de la tangente (T) à la

   courbe (C) au point I est $y=g(x)$. Déterminer $g(x)$.

5. On pose $d(x)=f(x)-g(x)$.

   a. Étudier le sens de variation de d′, calculer $d'(\frac{-1}{2})$ et donner le signe de d′.

   b. Étudier le sens de variations de d, calculer $d(\frac{-1}{2})$ et donner le signe de d.

   c. Donner la position de la tangente (T) par rapport à la courbe (C).

6. Tracer la courbe (C) et la tangente (T).

7. Soit α un réel strictement positif. On note A(α) l'aire en cm^2 de la région du plan

   limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations

   $x=-\frac{5}{2}$ et $x=\alpha$.

   Calculer A(α). (On peut éventuellement utiliser le résultat de la partie I.)

Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.