Probabilité:

Une petite entreprise de textile commercialise des pantalons et des chemises.

Quand un client se présente, il achète au plus un pantalon et une chemise.

1. La probabilité pour qu'un client achète un pantalon est 0,2. La probabilité pour qu'un
client achète la chemise quand il a acheté le pantalon est 0,7 et la probabilité qu'il achète la chemise quand il n'a pas acheté le pantalon est 0,1.

On note P l'événement « un client achète le pantalon».

On note C l'événement « un client achète la chemise».

a)Montrer que la probabilité de l'événement $P \cap C$ est égale à 0,14.

b) Calculer la probabilité de l'événement C.

c) Calculer la probabilité pour qu'un client achète le pantalon quand il a acheté la chemise.

2. Le pantalon est vendu à 45 dollars et la chemise à 25 dollars.

a) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs les dépenses d'un client
Vérifier que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{0, 25, 45, 70\}$.
Déterminer ainsi la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Probabilité.

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A. On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

•A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A»;

•B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;

•V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1) Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2) a) Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3) Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

Probabilité.

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets; de plus, les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.

On note A_1 l'évènement : « les deux sujets obtenus par le premier candidat proviennent du même examinateur » et A_2 l'évènement « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».

On note A l'évènement contraire de l'évènement A.

1. Montrer que la probabilité de l'évènemenA1est égale à $\frac{1}{19}$.

2. a. Calculer directement la probabilité conditionnelle $p(A_2/A_1)$ de l'évènement A_2 sachant que A_1 est réalisé.

   b. Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\frac{1}{323}$.

3. a. Calculer la probabilité $p(A_2/\overline{A_1})$.

   b. En remarquant que $A_2=(A_2\cap A_1)\cup(A_2\cap\overline{A_1})$, calculer la probabilité $p(A_2)$ puis en déduire que $p(A_2\cup A_1)=\frac{33}{323}$.

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les valeurs 0, 1 ou 2.

   a. Déterminer la loi de la probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Probabilité.

Dans tout l'exercice, A et B étant deux évènements, P(A) désigne la probabilité de A;   P(B / A) la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

i	0	1	2
$P(X=i)$	0,1	0,5	0,4

a. Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7;
celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres
clients. On considère les évènements suivants :
C_1 « en cinq minutes, un seul client se présente » ;
C_2 « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;
E « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence».

a. Calculer $P(C_1 \cap E)$.
b. Montrer que $P(E/C_2) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
c. En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence
en cinq minutes; déterminer la loi de probabilité deY.

<u>Probabilité.</u>

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et deux boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne A :

•si elle est noire, on la place dans l'urne B,
•sinon, on l'écarte du jeu. On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B.

On considère les événements suivants :
R_1: « La boule tirée de A est rouge ».
N_1: « La boule tirée de A est noire ».
R_2: « La boule tirée de B est rouge ».
N_2: « La boule tirée de B est noire ».

1. a. Calculer les probabilités des événements R_1 et N_1.
   b. Calculer les probabilités des événements « R_2 sachant R_1» et « R_2 sachant N_1». En déduire que la probabilité de R_2 est de $\frac{27}{50}$.
   c. Calculer la probabilité de N_2.
2. On répète n fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de A, suivie du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes. Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99?

Probabilité.

Un meuble est composé de 10 tiroirs T_1, T_2, ..., T_{10}.
Une personne place au hasard une boule dans un des tiroirs et une autre est chargée de trouver le tiroir contenant la boule à l'aide de la stratégie suivante :
la personne ouvre le tiroir T_1.Si la boule est dans le tiroir T_1, la recherche est achevée, sinon la personne ouvre le tiroir T_2, et ainsi de suite ...en respectant l'ordre des numéros de tiroirs. On remarquera qu'avec cette stratégie, le tiroir T_{10} n'est jamais ouvert. Pour i entier compris entre 1 et 10 ($1 \leq i \leq 10$), on appelle B_i l'évènement
« La boule se trouve dans le tiroir T_i».
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs qui ont été ouverts afin de localiser la boule avec cette stratégie.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de X.
2. a. Montrer que, pour i entier compris entre 1 et 8 ($1 \leq i \leq 8$), l'évènement (X=i) est l'évènement Bi.
   b. Justifier que l'évènement (X=9) est la réunion des évènements B_9 et B_{10}.
   c. Déterminer la loi de probabilité de X.
   d. Calculer l'espérance mathématique de X.

Probabilité.

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et
n boules vertes ($0 \leq n \leq 10$). Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne.
   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a. R : « la boule tirée est rouge » ;
   b. B : « la boule tirée est blanche » ;
   c. V : « la boule tirée est verte ».
2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée
   ci- dessous.

Le joueur tire une boule de l'urne
•si elle est rouge, il gagne 16 F :
•si elle est blanche, il perd 12 F;
•si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne;
. si celle boule est rouge, il gagne 8 F;
. si cette boule est blanche, il perd 2 F;
. si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.
Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.

Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un tirage ou deux tirages selon le cas).

a. Déterminer les valeurs prises par X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Montrer que l'espérance mathématique de X est $12+16\frac{n}{(n+7)^2}$.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0; 10] par f(x)=$\frac{x}{(x+7)^2}$.

Étudier les variations de f.

4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique X est maximale.

Calculer celle valeur maximale (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction

<u>Probabilité.</u>

1. Une urne contient deux boules blanches et n noires, indiscernables au toucher.

Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note

A_2 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'évènement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$.

2. Dans toute la suite du problème on prend n=4.

A- Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note:

A_0 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules noires »

A_1 l'évènement : « le joueur a tiré une boule noire et une blanche»

A_2 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

a. Calculer la probabilité des évènementsA_0 et A_1.

b. Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée.

Soit X le nombre de points marqués.

1- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2- Déterminer E(X).

B -Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules.

Soit B_i l'évènement : « on obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » (i=0, 1 ou 2).

a. Donner $p(B_0/A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.

Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$.

En déduire que $p(B_0)=\frac{41}{75}$.

b. Montrer de même que $p(B_2)=\frac{2}{75}$.

c. En déduire $p(B_1)$.

Probabilité.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à1). U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule deU_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'évènement

A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

a. Montrer que la probabilité p(A) de l'évènement A peut s'écrire :$p(A)=\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$.

b. Déterminer la limite de p(A) lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'évènement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».Vérifier que la probabilité p(B) de l'évènement B peut s'écrire $p(B)=\frac{6}{4(n+3)}$

3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2.

— Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n francs;

— Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs;

— Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépassepas10?

Dans la suite, on considère $n>10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche,$X=2n-20$).

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

Probabilité.

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production, il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée :

— la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu incident, est égale à $\frac{1}{50}$;

— la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à $\frac{1}{500}$;

— la probabilité qu'un incident se produise est égale à $\frac{1}{100}$.

On pourra noter : A l'évènement « l'alarme se déclenche » ;
I l'évènement « un incident se produit » ;

1. Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.
En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.
2. Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut?
3. L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident?

Partie B

Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant :

— 5000 F pour un incident lorsque l'alarme fonctionne;
— 15000 F pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas;
— 1000 F lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour.
Soit X la variable représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Quel est le coût journalier moyen des anomalies?

Probabilité.

Six personnes jouent au bowling. On appelle «strike» le fait de renverser toutes les quilles d'un seul lancer de boule .Parmi les six personnes, quatre d'entre elles, qui ont l'expérience du jeu,réussissent le «strike» avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$. Les deux autres débutantes, réussissent le « strike » avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

Partie A

Un des six joueurs désigné par le hasard se prépare à lancer la boule. On note

E l'évènement : « c'est un des quatre joueurs expérimentés ».

S l'évènement : « le joueur fait « strike » ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement E∩S: « le joueur est expérimenté et réussit son « strike » ».
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $\overline{E}$∩S: « le joueur est débutant et réussit son « strike » ».
3. En déduire la probabilité de l'évènement S.
4. Un « strike » vient d'être réussi. Quelle est la probabilité pour que le joueur qui l'a réussi soit un débutant?

Partie B

Parmi les six joueurs, on choisit un joueur A expérimenté, et un joueur B débutant.

Ils jouent chacun quatre parties; une partie consistant à lancer une seule boule :

si c'est « strike », la partie est gagnée, sinon, elle est perdue. La probabilité de gagner une partie est donc égale à $\frac{3}{4}$ pour le joueur A et à $\frac{1}{4}$ pour le joueur B.

1. On note X le nombre de parties gagnées par le joueur A ; donner la loi de probabilité De X.(on donnera les résultats sous forme de fractions de dénominateur 256).
2. On note Y le nombre de parties gagnées par le joueur B; on suppose que la loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

Y= y_i	0	1	2	3	4
P(Y= y_i)	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

Si x_i et y_i sont des éléments de l'ensemble {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4}, on suppose que les
évènements «$X=x_i$» et «$Y=y_i$» sont indépendants. Calculer la probabilité de l'évènement «$X<Y$» c'est-à-dire que le joueur B gagne davantage de parties que le
joueur A

Probabilité.

Une urne contient 8 jetons : trois jetons noirs et carrés, trois jetons noirs et ronds, un jeton vert et carré, un jeton vert et rond. L'épreuve consiste à extraire, au hasard, deux jetons de l'urne selon une procédure qui est déterminée par le lancer d'une pièce truquée :

•si l'on obtient « PILE », on extrait les deux jetons simultanément,

•si l'on obtient «FACE», on extrait les deux jetons successivement avec remise.

Lors du lancer de la pièce, la probabilité d'apparition de « PILE » est $\frac{7}{15}$.

On note :

P l'évènement « on obtient PILE » ;

F l'évènement « on obtient FACE » ;

A l'évènement « les deux jetons tirés ont la même forme OU la même couleur »;

E_1 l'évènement « obtenir deux jetons de la même couleur » ;

E_2 l'évènement « obtenir deux jetons de la même forme » ;

E_3 l'évènement «obtenir deux jetons de la même forme ET de la même couleur ».

Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

1. On lance la pièce.
   a. On suppose que l'on a obtenu « PILE ».
      Déterminer la probabilité conditionnelle des évènements E_1, E_2 et E_3.
      En déduire que la probabilité de l'évènement A, sachant que P est réalisé, est $\frac{11}{14}$.
   b. On suppose que l'on a obtenu « FACE ».
      Déterminer la probabilité conditionnelle des évènements E_1, E_2 et E_3.
      En déduire que la probabilité de l'évènement A, sachant que F est réalisé est $\frac{13}{16}$.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?
3. Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on répète n fois l'épreuve, de manière indépendante. Déterminer la probabilité p_n pour que l'évènement A se

réalise à chaque épreuve.

Pour quelles valeurs de n, a-t-on $p_n > \frac{1}{2}$.

Probabilité.

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux :
leurs faces sont numérotées de 1à 6.Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.
On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance. On note A l'évènement : « les deux dés tirés sont normaux ».
On note B l'évènement : « les deux faces supérieures sont numérotées 6».

1. a. Définir l'évènement contraire de A que l'on notera $\overline{A}$.
   b. Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$?
2. a. Calculer p(B/A), probabilité de B sachant que A est réalisé, puis p(B∩A).
   b. Calculer p(B).
3. Calculer p(A/B), probabilité de A sachant que B est réalisé.

Probabilité.

Une classe de terminale S d'un lycée compte 30 élèves dont 10 filles.

1. À chaque séance du cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard
   trois élèves.
   Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons »
B : « Les trois élèves interrogés sont de même sexe »
C : « Il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés. »
2. Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles.
On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexes différents.
Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
D : « Les deux délégués sont internes »
E : « Un seul de deux délégués est interne ».
3. À la fin de chaque séance le professeur désigne au hasard un élève qui effacera le
   tableau. Un même élève peut être désigné plusieurs fois.
   a. Déterminer la probabilité p_n pour que le tableau soit effacé au moins une fois par
      une fille à l'issue de n séances.
   b. Déterminer le nombre minimal de séances pour que $p_n > 0,9999$.

Probabilité.

Monsieur M est chargé de ventes à domicile pour le bénéfice d'une association.

À chaque personne sollicitée, il propose l'achat d'un livre seul, ou d'une cassette seule, ou l'achat d'un livre et d'une cassette. Après un premier bilan de son activité, monsieur M estime que la probabilité qu'une personne visitée choisie au hasard achète un livre (évènement L) est 0,2, la probabilité qu'elle achète une cassette (évènement C) est 0,1 et la probabilité qu'elle n'achète rien (évènement R) est 0,75.

Partie A

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   D : « La personne visitée achète un livre ou une cassette ».
   E : « La personne visitée achète un livre et une cassette ».
   F : « La personne visitée achète seulement un livre ».
   G : « La personne visitée achète seulement une cassette ».
2. Sachant que la personne visitée a acheté un livre, quelle est la probabilité qu'elle ait
   acheté aussi une cassette?

Partie B

Monsieur M se présente successivement chez n personnes choisies au hasard. Calculer la probabilité p_n qu'une personne au moins lui achète un livre ou une cassette. Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour avoir $p_n>0,9$?

<u>Probabilité.</u>

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur. Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur. Quand il est présent, il le branche une fois sur trois. Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.

Un client téléphone à l'artisan. On note :

R l'évènement « le client obtient le répondeur » ;

A l'évènement « l'artisan est présent » ;

1. Déterminer la probabilité P(R), ainsi que les probabilités conditionnelles P(R/A) et
   $P(R/\overline{A})$.
2. a. Exprimer P(R) en fonction de P(R/A), $P(R/\overline{A})$ et P(A).
   b. En déduire l'égalité $\frac{4}{5}=-\frac{2}{3}P(A)+1$ et calculer la probabilité que l'artisan soit présent.
3. Un client téléphone; il obtient le répondeur. Déterminer la probabilité que l'artisan
   soit présent.

<u>Probabilité.</u>

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que50 des 100 leçons.

On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers. On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets?
2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets?
3. Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets?
4. Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets?

Partie II

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100)

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets?
2. Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à 0,95.

Probabilité.

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q. C. M.) est utilisé. On s'intéresse à cinq questions de ce Q. C. M. supposées indépendantes. À chaque question sont associées quatre affirmations, numérotées 1,2, 3 et 4, dont une seule est exacte. Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte; sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

1. Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que
   les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.
   a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « Le candidat répond correctement à la première des cinq questions » ;
   B : « Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq ».
   b. On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note - 1 à toute réponse incorrecte. Calculer la probabilité de l'évènement
   C : « Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions ».
2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions. Quelle est alors la probabilité de l'évènement C décrit au1 b.

Probabilité.

1. Une urne U_1 contient deux jetons numérotés 1 et 2. Une urne U_2 contient 4 jetons
   numérotés 1, 2, 3 et 4. On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne.

(Les choix sont supposés équiprobables).

a. Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1?

b. On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1?

2. On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.

a. Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.

b. Soit S la variable aléatoire, qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité deS.

c. Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ euros de Dominique. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction deλ, puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que E(X) soit égale à 0).

<u>Probabilité.</u>

On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête, peint en bleu. On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête. On place ces 27 cubes dans un sac.

Partie A

On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont
équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Partie B

On tire maintenant, au hasard, simultanément deux des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Montrer que la probabilité d'avoir, au total, six faces peintes est égale à $\frac{28}{351}$.
2. On désigne par n un nombre entier naturel non nul; après avoir noté le nombre de faces coloriées sur les deux premiers cubes tirés, on les remet dans le sac et on recommence l'opération de manière à effectuer n tirages successifs et indépendants de deux cubes.

a. Calculer la probabilité p_n pour que l'on obtienne, au total, 6nfaces peintes.

b. Déterminer la plus petite valeur de n pour que p_n soit inférieur à 10^{-12}.

Les résultats des calculs de probabilités seront donnés sous forme fractionnaire.

Probabilité.

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.
   a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?
   b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5boules blanches et 5 boules noires?
2. Soit x un entier tel que $0 \leq x \leq 10$. On place maintenant x boules blanches et $10-x$ boules noires dans l'urne A et les $10-x$ boules blanches et x boules noires restantes dans l'urne B.
   On procède à l'expérience E : On tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A. On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».
   a. Pour cette question a., on prend x=6. Quelle est la probabilité de l'évènement M?
   b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à : $\frac{-x^2+10x+5}{55}$
   c. Pour quelles valeurs de x l'évènement M est-il plus probable que l'évènement contraire $\overline{M}$.

Probabilité.

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante: On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.

Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'évènement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».

a. Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \overline{B})$, puis $P(E_0)$.

b. On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage.

Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire?

2. On appelle E_1 l'évènement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

b. On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche?

Probabilité.

Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre boules noires. On prélève simultanément quatre boules dans l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1. Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore (les 4 de même couleur).

2. a. Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore composé de boules rouges et blanches?

b. Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est $\frac{68}{165}$.

3. Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement tricolore.

4. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore?

Probabilité.

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Ilse tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : «La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte».
Calculer sa probabilité.

2. On appelle D_2 l'évènement : «La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte». Calculer la
probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.
En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$.
3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte
et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?
4. Pour $1 \leq i < j \leq 5$, on note (i;j) l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont
les clefs numéros i et j», et P(i;j) la probabilité de cet évènement.
a. Calculer P(2 ; 4).
b. Calculer P(4 ; 5).

Probabilité.

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B. Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B. Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :
A_1« la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2« la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1« la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2« la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».
1. a. Calculer les probabilités suivantes :$p(A_1)$ et $p(B_1)$.
b. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :$p(A_2/A_1)$,$p(A_2/B_1)$
et en déduire $p(A_2)$.
c. Calculer $P(B_2)$.
Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.
On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.
a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Probabilité.

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.
Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre.
Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres.
Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.
1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.
On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo», et

T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».
Montrer que les évènements P et T sont indépendants.
2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier
élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui
aussi tiré au sort.
a. On appelle T_1 l'évènement : «Le premier élève appartient au club théâtre».
Calculer $p(T_1)$.
b. On appelle T_2 l'évènement «L'élève pris en photo appartient au club théâtre».
Calculer $p(T_2/T_1)$, puis $p(T_2/\overline{T_1})$. En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \overline{T_1})$.
c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre
est 0,2.
3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de
photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même
élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.
Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre
n'ait été photographié.

<u>Probabilité.</u>

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
4 jetons blancs marqués 0;
3 jetons rouges marqués 7;
2 jetons blancs marqués 2;
1 jeton rouge marqué 5.
1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles?
2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :
A: « Les quatre numéros sont identiques ».
B: « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
C: «Tous les jetons sont blancs».
D: «Tous les jetons sont de la même couleur ».
E: « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

a. Montrer que la probabilité de l'évènement B, est $\frac{4}{105}$.
b. Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E.
c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de

l'évènement B.
On établit la règle de jeu suivante :
— Si le joueur peut former 5000, il gagne 75 F.
— Si le joueur peut former le nombre 7000, il gagne 50 F.
— Si le joueur peut former le nombre 2000, il gagne 20 F.
— Si le joueur peut former le nombre 0000, il perd 25 F.
Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.
G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

Probabilité.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :
 • A_1 l'évènement « la personne est absente lors du premier appel »;
 • R_1 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Quelle est la probabilité de R_1?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.
Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
On note :
A_2 l'évènement « la personne est absente lors du second appel » ;
R_2 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;
R l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire ».
Montrer que la probabilité de R est 0,176.

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel?

4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter.

Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des 20 personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire?