Exponentielle:

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$,et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : Etude de fonctions auxiliaires.

1) Soit la fonction h définie sur IR par h(x)= xe^x+1
   a- Calculer la limite de h en $-\infty$,et étudier les variations de h.
   b- Démontrer que h(x)>0 et en déduire le domaine de définition de f .
2) Soit g la fonction définie sur IR par g(x)= $x+2-e^x$.
   a- Déterminer les limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b- Etudier les variations de g et dresser le tableau de variations de g.
   c- Montrer que l'équation g(x)=0 admet deux solutions α *et* β tels que
      -1,85< β < -1,84 et 1,14< α <1,15.
   d- En déduire le signe de g(x).

Partie B : Etude de la fonction f .

1) Déterminer les limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$, et interpréter graphiquement les résultats.
2) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau de variations.
   c) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$
3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
   b) On donne u(x)= e^x-xe^x-1, vérifier que $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$
   c) Etudier le sens de variation de la fonction u(x) et en déduire son signe.
   d) Déduire la position de (C) par rapport à (T)
4) Tracer (T) et (C).

Logarithme et exponentielle:

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,On donne la courbe (C) d'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$

a- Montrer que le domaine de définition de f est IR.
b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+\dfrac{x}{2}$ et donner une interprétation graphique des résultats.
c- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donner une interprétation graphique du résultat.
d- Montrer que $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+e^x}\right)$ et dresser le tableau de variations de f .
e- 1) Montrer que (C) coupe la droite (d) d'équation y=x en un seul point d'abscisse α
   2) Montrer que 0< α <1
   3) Tracer (C) et(d).

f- 1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
   2) Trouver le domaine de définition de f^{-1} et $f^{-1}(x)$.
   3) Tracer le graphe de f^{-1}.

Exponentielle .

I- Soit la fonction g définie sur R, qui à tout x associe : $g(x) = e^{x}(x-1) + x^{2}$.

1. a. Montrer que la dérivée de la fonction g sur R est $g'(x) = x(e^{x} + 2)$.
   b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   c. Étudier le signe de g′(x) sur R, et dresser le tableau de variation de g sur R.
2. Montrer que l'équation :g(x)=0 admet une solution α et une seule sur l'intervalle
   [0 ;+∞[. Montrer que α est dans l'intervalle I=$[\frac{1}{2},1]$;

II- Soit la fonction f définie sur [0 ;+∞[par :f(x)=$\frac{e^{x}}{e^{x}+x}$

1. Montrer que les équations :f(x)=x et g(x)=0 sont équivalentes sur [0 ;+∞[,et que,
   par suite, l'équation f(x)=x admet α pour solution unique sur I.
2. a. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur [0 ;+∞[.
   b. Déterminer la limite de f en +∞.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
   d. Construire la courbe représentative C de f sur [0 ;+∞[dans un repère orthonormé (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à C aux points d'abscisses 0 et 1.

Exponentielle.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les fonctions définies sur R solutions de l'équation différentielle
   (E1) :y″+2y′+y=0.
2. On considère l'équation différentielle (E2) :y″+2y′+y=x+3.
   a. Vérifier que la fonction p définie sur R par p(x)=x+1 est solution de(E2).
   b. Démontrer qu'une fonction g est solution de (E2) si, et seulement si, la fonction g- p est solution de (E1).
   c. Déduire de1.et 2.(b) les solutions de (E2)
   d. Déterminer la solution générale de (E2) qui vérifie :g(0)=1 et g′(0)=2.

Partie B : étude d'une fonction f et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle [0,+∞[par :f(x)=x+1+xe^{-x}.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère

Orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. a. f′et f″ désignant respectivement les dérivées première et seconde def, calculer, pour tout réel x,f′(x) et f″(x).
   b. étudier le sens de variation de la dérivée f′.
   c. Démontrer que, pour tout réel x, f′(x)>0.
   d. Calculer la limite de f en +∞.
   e. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. a. Démontrer que la droite (D) d'équation y=x+1 est asymptote à (C) et préciser
   la position relative de (D) et (C).
   b. La courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D).
   Déterminer les coordonnées de A.
3. Démontrer que l'équation f(x)=2 admet sur [0,+∞[une unique solution notéeα,
   puis vérifier que 0<α<1.
4. a. Construire la droite (D), le point A défini au2. b, la courbe (C) et la tangente en A à la courbe (C).
   b. Donner par lecture graphique une valeur approchée deα.