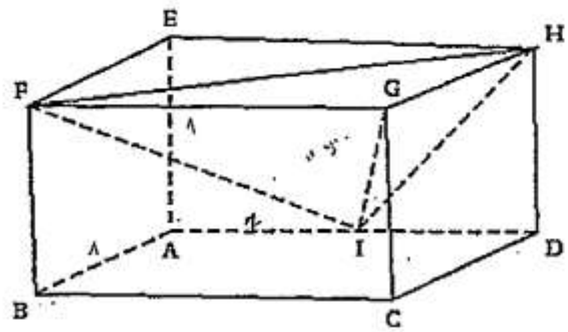
وزارة التربية والتعليم العالي
ثانوية رأس بعلبك

امتحان الفصل الأول
فرع العلوم العامة

المادة:رياضيات
المدة:أربع ساع

I- GEOMETRIE DANS L'ESPACE (3 points)

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace , on considère le pavé droit ABCDEFGH tel Que AB=1 , AD=2 et AE=1 et soit I le milieu de [AD}.



L'espace est munie du repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE})$

1- Déterminer les coordonnées des points C ,D ,F , G et H (Justifier vos réponses). (0,5pt)

2- a- Calculer le volume du tétraèdre GFIH (0,5pt)

b- Montrer que le triangle FIH est rectangle en I. (0,25pt).

c- Déduire la distance d de G au plan (FIH) (0,25pt)

3- Trouver une équation du plan du plan (FIH) et retrouve la valeur de d (0,5pt)

4- a- La droite (AG) est -elle perpendiculaire au plan (FIH) (0,25pt).

b- Trouve un système d'équations paramètriques de cette droite (0,25pt).

c- Trouve les coordonnées du point K intersection de (AG) et (FIH) (0,5pt)

II- COMPLEXES ET GEOMETRIE (2 points)

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A , B et C d'affixes respectives 2i ,-1 et i et on donne la transformation f ,qui à tout point M , d'affixe z ,distinct de A associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z+1}{z-2i}$

1- Déterminer l'affixe du point C' image de C par f ,et trouve la nature du quadrilatère ACBC' (0,5pt)

2- Montrer qu'il existe un seul point C" tel que f(C")=C , et trouve la nature du triangle BCC". (0,5pt)

3- Donner une interprétation géométrique du module et de l'argumment de z' . (0,25pt).

4- Déterminer l'ensemble des points M si z' est un nombre réel strictement negative. (0,25pt).

5- Déterminer l'ensemble des points M si z' est un imaginaire pur non nul. (0,25pt).

6- Déterminer l'ensemble des points M si M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1. 0,25pt).

II- HOMOTHETIE (3,5 points)

Dans le plan orienté on considère les points A , B et E tels que : $\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AE}$ et soit un point C

tel que $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}(\text{mod } 2\pi)$, la droite parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) en F.

Soit I le milieu de [BC] ,et J le milieu de [EF] et D le point d'intersction des droites (EC) et (BF).

On note h_A l'homothétie de centre A qui transforme B en E ,et h_D l'homothétie de centre D qui transforme E en C

1- faire une figure (0,25pt). 0,5
2- Calculer les rapports de h_A et h_D (0,25pt).
3- Déterminer $h_A(C)$ et $h_D(F)$ (0,25pt).
4- En déduire les natures et les éléments de $h_A o h_D$ et $h_D o h_A$ (0,75 pt)
5- On appelle E' l'image de E par h_A et E" l'image de E' par h_D .Représenter E'et déduis une construction de E"(0,5pt)
6- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_D o h_A o h_A o h_D$ (0,5pt)
7- Démontrer que BECE" est un parallélograme. (0,5pt)
8- C varie sur demie-droite]Ax) telle que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{Ax}) = \frac{\pi}{4}(\text{mod } 2\pi)$,determiner et construire le lieu de E".(0,5pt)

III- SUITE NUMERIQUE (3 points)

On donne la suite numérique définie par $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}$ où n est un entire naturel.

1- a- Démontre que $u_n \geq 2$ pour tout n. (0,25pt) 0,5
   b-Démontre que $u_n \leq 3$ pour tout n. (0,25pt)
2- Démontre que cette suite est croissante. (0,5pt)
3- En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite. (0,5pt)
4- a- Calcule u_1 *et* u_2 *et* u_3 *et* u_4 et démontre que ces valeurs vérifient la relation $u_n = \frac{1+3(2^n)}{1+2^n}$.(0,5pt)
   b- Démontre cette relation par recurrence. (0,75pt)
   c- Retrouve la limite de u_n . (0,25pt)

IV- FONCTION LOGARITHMIQUE. (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(\ln x - 2)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ et la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Que peut-on déduire? (0,5pt)
2- Trouver $f'(x)$ (0,25pt)
3- Soit la fonction $g(x) = \ln x + x - 3$
   a-Etudie les variations de g (0,25pt)
   b- Montre que g(x)=0 admet une seule solution α ,et démontre que $2{,}2 < \alpha < 2{,}21$ (0,5pt)
   c- Etudie le signe de g(x). (0,5pt)
4- Etudier les variations de f (0,5pt)
5- Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ et trouver un encadrement de $f(\alpha)$.(0,5pt)

6- Démontre que (C) coupe (x'x) en deux points dont les abscisses sont à trouver (0,5pt).

7- Tracer (C). (0,5pt)

8- Soit la fonction F(x) définie sur]0,+ ∞[par $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ et (Γ) sa courbe representative:

a- Sans calculer F(x) ,étudier les variations de F sur]0,+ ∞[.(On ne demande pas les calculs). (0,5pt)

b- Démontre que F(x)=$x\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x-3x+3$. (0,25pt)

c- Calculer l'aire du domaine limité par (C) et l'axe (x'x). (0,25pt)

VI- FONCTION EXPONENTIELLE (3,5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=e^x-x-1$ et (C) sa courbe representative dans le plan d'un repère orthonormé .

1- Calculer la limite de f (x) quand x→ −∞, et démontrer que la droite (d) : y=-x-1 est alors asymptote. (0,5pt)

2- Calcule les limites de f (x) et de $\frac{f(x)}{x}$ quand x→ +∞, que peut-on déduire? (0,5pt)

3- Trouver f '(x) et établir le tableau de variation de f.(0,5pt)

4- Construire d et (C) . (0,5pt)

5- Soit M un point quelconque de (C) ,d'abscisse a. (tous les calculs sont en fonction de a).

a- Trouver l'équation de la tangente (T) en M à (C). (0,25pt)

b- Trouver les coordonnées du point N où (T) coupe (d). (0,25pt)

c- Soient M' et N' les projections orthogonales de M et N sur (x'x) ,démontre que $\overline{M'N'}$ est un vecteur fixe (0, 5pt)

d- Déduis une construction simple de (T). (0,5pt).