

I - (8 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, On donne le point $A(1; -1; 1)$ et les deux droites :

$$(d): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (d'): \begin{cases} x = 2m - 1 \\ y = m - 2 \\ z = m \end{cases}$$

- Montrez que ces deux droites sont concourantes en A.
- Trouvez une équation du plan (P) formé par (d) et (d').
- Trouvez une équation du plan (Q) contenant (d) et perpendiculaire à (P).
- Soit le point $E(4; 2; 1)$
 - Vérifiez que E est un point de (P).
 - Trouvez une équation du plan (R) passant par E et perpendiculaire à (d).
 - Trouvez les coordonnées du point B intersection de (d) et (R) et déduisez la distance de E à (d).
 - Trouvez les coordonnées du point C de (d') si $\overrightarrow{EC} \cdot \vec{V}' = 0$ où \vec{V}' est un vecteur directeur de (d').
 - Que représente C pour E? , En déduire la distance de E à (d') et vérifiez qu'elle est égale à la distance de E à (R).
 - Trouvez les équations des deux bissectrices de l'angle formé par (d) et (d').

II- (7 points)

On donne un parallélogramme ABCD, et un point I de [BD], la parallèle menée de I à (CD) en N, et la parallèle menée de I à (AB) coupe (BC) en P et (AD) en Q.

- Dans cette partie on va trouver la position de I si (MQ) est parallèle à (AB).
 - Dans ce cas, Justifiez l'existence d'une homothétie de centre A qui transforme M en B et Q en D.
 - Démontrez que l'image de I par cette homothétie est C.
 - En déduire que I est alors milieu de [BD].
- Dans cette partie I n'est pas milieu de [BD]. (MQ) et (BD) se coupent en un point E.
Soit h l'homothétie de centre E qui transforme I en D.
 - Trouvez l'image de M par h.
 - Trouvez l'image de B par h.
 - Trouvez l'image de P par h.
 - Construisez l'image de C par h.
 - Construisez le point F dont l'image par h est I.

III- (8 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les points A et B ont respectivement pour affixes 1 et 4, (d) est la droite (OA) privée de A, (Δ) la droite perpendiculaire en A à (d) privée de A et (Γ) le cercle de Centre A et de rayon 1. f est l'application qui à tout point m d'affixe z différent de 1 associe le point M d'affixe

$$Z=f(z)=\frac{z^2}{z-1}$$

A- On note g et h les fonctions :

$$g(x)=\frac{x^2}{x-1} \text{ avec } x \in D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\quad \text{et} \quad h(x)=\frac{x^2-1}{x} \text{ avec } x \in D' =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

- 1- Étudiez les variations de g et h sur leurs domaines de définition D et D'.
- 2- Étudiez les limites de g et h aux bornes des domaines.
- 3- Dressez les tableaux de variations de g et h.
- 4- Déterminez $g(D)$ et $h(D')$

B- 1- On suppose dans cette question que M a pour affixe 3. Ecrivez sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle les affixes z de m telles que $f(z)=3$.

2- On suppose dans cette question que $z=1+e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$)

a- Calculez, en fonction de θ , l'affixe Z de M.

b- Déduisez l'ensemble des points M quand θ varie.

3- On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$ où x, y, X et Y sont réels.

a- Calculez X et Y en fonction de x et y.

b- Quel est l'ensemble des points M lorsque le point m décrit (d).

c- Quel est l'ensemble des points M lorsque le point m décrit (Δ).

d- Quel est l'ensemble des points m lorsque le point M décrit l'axe (O, \vec{u})

IV- (5 points)

1- Démontrez que :

a) $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)-x$

a) Démontrez que f est décroissante.

b) Calculez f(0) et déduire le signe de f(x).

3) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$

a) Démontrez que g est croissante.

b) Calculez g(0) et déduire le signe de g(x).

c) Déduire que pour tout entier naturel non nul n, et pour tout entier naturel non nul k, on a :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$$

5) Déduisez que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)\dots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = \sqrt{e}$

