Lycée officiel Ras-Baalbeck | Maths | SV (2 heures)

I-On donne les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$

a) Ecris z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Soit $z = z_1.z_2$ .Ecris z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique .

c) Déduis les valeurs de $\cos(7\pi/12)$ et $\sin(7\pi/12)$.

II- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, on associe au point M d'affixe z différent de -2i , le point N d'affixe $Z=\dfrac{z-2}{z+2i}$.

a) On pose z=x+iy et Z=X+iY . Exprime X et Y en fonction de x et y .
b) Détermine l'ensemble des points M si Z est imaginaire pure.
c) On donne A(2,0) et B(0,-2).
   1) Donne une interprétation de arg(Z) à l'aide des points M , A et B .
   2) Retrouve l'ensemble des points M si Z est imaginaire pure.

III- On donne la fonction $f(x) = x - \sqrt{x^2+4}$ et (C) son graphe dans repère orthonormal .

a) Démontre que $f(x)$ est définie pour tout x .
b) 1- Calcule la limite de $f(x)$ quand $x \to -\infty$
   2- Démontre que la droite (d): y = 2x est asymptôte oblique
c) Calcule la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ et déduis alors l'asymptôte horizontale .
d) Démontre que $x - \sqrt{x^2+4} \le 0$ pour tout x .
e) Trouve $f'(x)$ et démontre que $f(x)$ est croissante .
f) Construit (C) .
g) 1- Démontre que $f(x)$ admet une fonction réciproque .
   2- Trouve cette fonction

IV- On donne la fonction $g(x) = x - \ln(\dfrac{x+1}{x})$

a) Démontre que g(x) est définie sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$
b) 1- Calcule les limites de $\ln(\dfrac{x+1}{x})$ quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$
   2- Déduis les limites de g(x) quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$ et l'asymptôte oblique .
c) Calcule la limite de g(x) quand quand $x \to -1^-$
d) Calcule la limite de g(x) quand quand $x \to 0^+$
e) Démontre que $g'(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}$ et déduis les variations de g(x) .
f) Utilise ces variations pour démontrer que g(x) =0 admet deux racines
g) Construit le graphe de g(x).