Exercices fonction logarithme pour la classe SG travaillé par Ghiwa Lakis

Email : ghiwalakis@gmail.com

Exercice 1 : fonction logarithme

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et de calculer l'aire d'un domaine plan.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]−1 ;+∞[par :$f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$.

1. Calculer f′(x),étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Calculer f(0). Montrer que l'équation f(x)=0 admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à [−0,72 ;−0,71].
3. Donner le signe de f(x), pour x appartenant à]−1 ;+∞[.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble]−1 ; 0[∪]0 ;+∞[par : $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition
   a. Calculer les limites de g(x) quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
   b. Calculer limite de g(x) quand x→−1 et limite de g(x) quand x→+∞.
2. Sens de variation de g
   a. Calculer g′(x) et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.
   b. Montrer que $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de g(α) en prenant α=−0,715.3.
3. Tableau de variations et représentation graphique de g
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).
4. Calcul d'aire

Soit a un réel strictement supérieur à 0. On pose :$I(a)=\int_1^a g(x)dx$.

   a. Donner, suivant les valeurs de a, une interprétation géométrique du réel I(a).
   b. En remarquant que, pour x appartenant à]0 ;+∞[: $\frac{1}{x(1+x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ calculer I(a) à l'aide d'une intégration par parties.
   c. Calculer limite de I(a) quand a→+∞ et limite de I(a) quand a→0.

Exercice 2 : Logarithme et suites.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$

A- Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2-2\ln x$

1- Etudier les variations de g(x).

2- En déduire le signe de g(x).

B- On appelle (C) la courbe représentative de f (x) dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1- Déterminer la limite de f en 0 et donner une interprétation graphique du résultat.

2- a- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b- Montrer que la droite $(d): y=\frac{x}{2}$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (d) et trouver leur point d'intersection A.

3- Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations.

4- Trouver le point B de (C) où la tangente (T) est parallèle à (d).

5- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α et que $0{,}34<\alpha<0{,}35$.

6- Tracer (d),(T) et(C).

C- On considère la suite (x_n) définie par $x_n=e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout entier naturel.

1- a- Montrer que (x_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b- Montrer que (x_n) est croissante.

2- Pour tout entier n on pose $a_n=4\int_{x_n}^{x_{n+1}}(f(x)-\frac{x}{2})dx$.

a- Donner une interprétation géométrique de a_n.

b- Montrer que $a_n=\frac{2n+1}{2}$ et en déduire que cette suite est arithmétique.

Exercice 3 : Logarithmes,intégrales et suite.

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur]0 ;+∞[par $f_n(x)=\frac{(\ln x)^n}{x^2}$.On note C_n a courbe représentative de f_n dans un repère ́orthogonal (Unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - Étude pour n=1

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim_{x\to\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour C_1?
2. Étudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau des variations de f_1.
3. Déterminer une équation de la tangente en $x_0=1$, à la courbe C_1.

Étude pour n=2

4. Déterminer $\lim_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim_{x\to\infty} f_2(x)$.Que peut-on en déduire pourC_2?
5. Calculer $f'_2(x)$ et donner le tableau des variations de f_2.

Partie B

1. Étudier le signe de $f_1(x)-f_2(x)$; en déduire la position relative de C_1 et C_2 .
2. Tracer C_1 et C_2.

Partie C

n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n=\int_1^e f_n(x)dx$.

1. On pose $F(x)=\frac{1+\ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.
2. En utilisant une intégration par parties montrer que : $I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n$.
3. Calculer I_2 puis l'aire en cm² du domaine compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations x=1 et x=e.

Partie D

1. En utilisant la question 2. de la partie C, montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul : $\frac{1}{n!}I_n=1-\frac{1}{e}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!})$
2. En utilisant un encadrement de lnx sur [1 ; e], montrer que, pour tout n entier naturel non nul on a $0\le I_n\le 1$.
3. En déduire $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)$.