Exercice fonction de la borne supérieure pour la classe SG travaillé par Ghiwa Lakis

Email : ghiwalakis@gmail.com

Exercice 1 : Fonction de la borne supérieure

A- On considère la fonction $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ où x est un réel.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$ et donner une interprétation graphique des résultats.

2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ et donner une interprétation graphique des résultats.

3- Etudier les variations de $f(x)$ et dresser le tableau de variations.

4- Tracer le graphe (Γ) de $f(x)$ dans un repère orthonormé.

B- Soit la fonction $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ où x est un réel, et (C) son graphe dans un repère orthonormé

1- Etudier le signe de $F(x)$

2- Utiliser le graphe (Γ) pour donner une valeur approchée de $\int_0^1 f(t)dt$. Dans la suite on prendra

$F(0)=b$ avec $b\approx-1{,}1478$

3- a) Montrer que $F(-x)=2b-F(x)$. Que représente le point I(0,b) pour (C).

b) Ecrire une équation de la tangente en I à (C).

4- Montrer que si t>0 alors $f(t)>t$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique des résultats.

5- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique des résultats.

6- Montrer que $F(-1)=2b$ et tracer (C).

7- a) Montrer que $F(x)=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})]$.

b) En déduire que si $x\geq1$ alors $\ln(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{2}})\geq\sqrt{2}-x\sqrt{x^2+1}$.

A-1) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty \;\; et \;\; \lim\limits_{-\infty}(f(x)+x) = \lim\limits_{-\infty}(\sqrt{1+x^2}+x) = \lim\limits_{-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right) = 0$ donc la droite

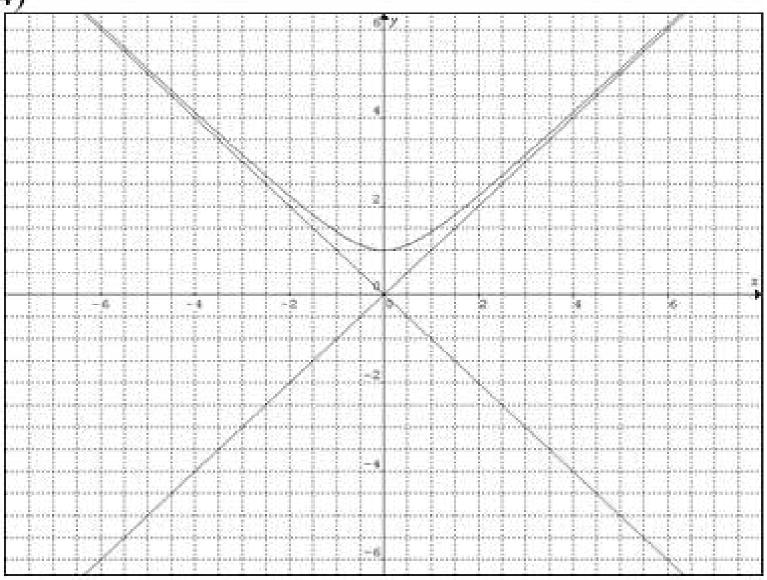
d'équation y=-x est asymptote en $-\infty$

2) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty \;\; et \;\; \lim\limits_{+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{-\infty}(\sqrt{1+x^2}-x) = \lim\limits_{-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) = 0$ donc la droite

d'équation y=x est asymptote en $+\infty$

3) $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$ a le signe de x donc minimum=1 pour x=0.

4)



Correction

B- 1) $f(t) = \sqrt{1+t^2} > 0 \;\; donc \; si \; x<1 \; F(x)<0 \; et \; si \;\; x>1 \; F(x)>0$

2) une valeur approchée est l'aire du trapèze $= (\dfrac{1+\sqrt{2}}{2})(1) \approx 1207$

3) $F(-x) = \int_1^{-x} f(t)dt \;\; soit \;\; u=-t \;\; alors \;\; du=-dt, \;\; F(-x) = \int_{-1}^{x} f(-u)(-du) = -\int_{-1}^{x} f(u)du = -\int_{-1}^{1} f(u)du - \int_{1}^{x} f(u)du$

$On\,a\,f(-u) = f(u) \;\; donc \;\; \int_{-1}^{1} f(u)du = 2\int_{0}^{1} f(u)du = -2b \;\; alors \;\; F(-x) = 2b - F(x)$

I(0,b) est centre de symétrie car F(0-x)+F(0+x)=2b.

4) $Si\, t > 0\ alors\ \ f(t) = \sqrt{1+t^2} > \sqrt{t^2 = t}$ par suite

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) > \lim\limits_{x \to \infty} \int_1^x t dt = \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}) = +\infty\, alors \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{F(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{1} = +\infty$

Donc direction asymptotique parallèle à (y'y).

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2b - F(-x)) = 2b - \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{1} = +\infty$

Donc direction asymptotique parallèle à (y'y).

6) F(-1) =2b-F(1) =2b-0=2b. (graphe).