Exercices coniques pour la classe SG travaillé par Ghiwa Lakis

Email : ghiwalakis@gmail.com

Exercice 1 : Parabole et ellipse.

Soit (d) une droite et O un point du plan tel que la distance de O à (d) est égale à 4cm.

1- Trouver l'ensemble des points F foyers des paraboles passant par O et de directrice (d).
2- On considère le système orthonormé (x'Ox,y'Oy) tel que (x'Ox) est perpendiculaire à (d) et (y'Oy) est parallèle à (d) et (d) est d'équation x=-4 dans ce repère.
   a- Ecrire une équation de l'ensemble des points F déjà trouvé.
   b- Ecrire une équation de l'ensemble (E) des points S sommets des paraboles.
   c- Quelle est la nature de l'ensemble (E).Trouver son centre et son axe focal. Tracer (E).
   d- Trouver les sommets, les foyers et les directrices de (E) et calculer son excentricité Et son paramètre.

Correction

1) O est un point des paraboles de foyers F de directrice (d) donc OF=distance de O à (d)=4cm
Donc F est sur le cercle de centre O de rayon 4cm, mais F n'appartient pas à (d) alors
L'ensemble des points F est le cercle sauf le point H projection orthogonale de O sur (d).

2) a- $x^2+y^2=16$ sauf le point H(-4,0)

b- Soit K la projection orthogonale de F sur (d), alors le sommet S est milieu de [FK]
donc F(x_F,y_F) tel que $x_F{}^2+y_F{}^2=16$ et (x_F,y_F) $\neq$ (-4,0) et K(-4,y_F) alors

$$x_S=\frac{x_F+x_K}{2}=\frac{x_F-4}{2}\ et\ y_S=\frac{y_F+y_K}{2}=y_F\quad donc\ x_F=2x_S+4\ et\ y_F=y_S$$

Remplaçons x_F et y_F on obtient $(2x_S+4)^2+y_S^2=16$ avec ($2x_S+4$,y_S) $\neq$ (-4,0) donc
(x_S,y_S) $\neq$ (-4,0) alors (E) est d'équation $(2x+4)^2+y^2=16$, avec (x,y) $\neq$ (-4,0).

c- (E) : $4(x+2)^2+y^2=16 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, soit X=x+2 et Y=y alors $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{16}=1$

c'est une ellipse de centre O'(X=0,Y=0) donc O'(-2,0)
Axe focal (Y'Y):X=0 donc x=-2

d- sommets principaux A'(X=0,Y=-4) et A(X=0,Y=4) donc A'(-2,-4) et A(-2,4)
sommets secondaires B'(X=-2,Y=0) et B(X=2,Y=0) donc B'(-4,0) et B(0,0)
$c^2=a^2-b^2=12$ donc F'(X=0,Y=$-2\sqrt{3}$) et F(X=0,Y=$2\sqrt{3}$) donc F'(-2, $-2\sqrt{3}$) et F(-2, $2\sqrt{3}$)

directrices (D'):Y=$-\frac{a^2}{c}=-\frac{8}{\sqrt{3}}=y$ et (D): Y=$\frac{a^2}{c}=\frac{8}{\sqrt{3}}=y$

$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et paramètre $p=\frac{b^2}{a}=\frac{4}{4}=1$.

Exercice 2 : Parabole

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,On donne la conique (P) d'équation $y^2 = -4x + 4$

a- Montrer que (P) est une parabole, et préciser son axe focal, son foyer et sa directrice (d)

b- Tracer (P).

c- Soit la droite (δ) d'équation y=x

1- Montrer que (δ) coupe (P) en deux points M' et M'' et trouver leurs coordonnées.

2- Trouver les équations des tangentes (T') et (T'') en M' et M'' à (P).

3- Montrer que (T') et (T'') sont perpendiculaires.

4- Montrer que (T') et (T'') se coupent en un point E de (d)

5- Montrer que (OE) et (δ) sont perpendiculaires.

d- Calculer l'aire du domaine limité par (P) et (y'y).

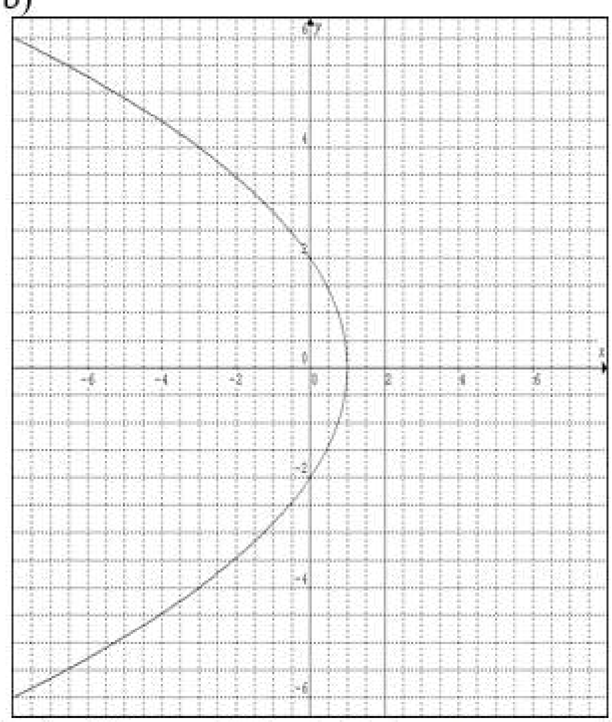
Correction

1) a) $y^2 = -4(x-1)$, soit Y=y et X=x-1 alors $Y^2=-4X$ de la forme $Y^2=-2pX$ où p=2

C'est une parabole d'axe focal (X'X):Y=0$\Rightarrow y=0 \Rightarrow$(x'x)

Foyer F($X=-\frac{p}{2}=-1$,Y=0) donc F(0,0) et directrice (d):$X=\frac{p}{2}=1 \Rightarrow x=2$.

b)



c) 1) $y^2=y^2$donne $x^2+4x-4=0$ alors $x'=-2-2\sqrt{2}$ *et* $x''=-2+2\sqrt{2}$ donc

$M'(-2-2\sqrt{2},-2-2\sqrt{2})$ *et* $M''(-2+2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2})$

2) Dérivons: 2yy'=-4 donc $y'=-\frac{2}{y}$ $si\ y\neq 0$ alors

(T'): $y=\frac{-2}{-2-2\sqrt{2}}(x+2+2\sqrt{2})-2-2\sqrt{2}=(\frac{1}{1+\sqrt{2}})x-2\sqrt{2}$ et

(T"): $y=\frac{-2}{-2+2\sqrt{2}}(x+2-2\sqrt{2})-2+2\sqrt{2}=(\frac{1}{1-\sqrt{2}})x+2\sqrt{2}$.

3) Produit des pentes=$(\frac{1}{1+\sqrt{2}})(\frac{1}{1-\sqrt{2}})=\frac{1}{1-2}=-1$.

4) $y=y\Leftrightarrow(\frac{1}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{1-\sqrt{2}})x=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\Rightarrow 2\sqrt{2}x=4\sqrt{2}\Rightarrow x=2\ et\ y=\frac{2}{1+\sqrt{2}}-2\sqrt{2}=-2$

Donc E(2,-2) qui appartient à (d): x=2.

5) Pente de (OE)=$\frac{y_E-y_O}{x_E-x_O}=\frac{-2}{2}=-1$ et pente de (δ)=1 donc elles sont perpendiculaires.

d) $A=2\int_0^1\sqrt{-4x+4}dx$, soit t=-4x+4 alors dt=-4dx , $dx=-\frac{dt}{4}$

pour x=0 t=4 et pour x=1 t=0 donc:

$A=2\int_4^0\sqrt{t}(\frac{-dt}{4})=\frac{1}{2}\int_0^4 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{1}{3}t\sqrt{t}]_0^4=\frac{1}{3}(4)(2)=\frac{8}{3}$ Unités d'aire.