Exercices fonction exponentielle pour la classe SG travaillé par Ghiwa Lakis

Email : ghiwalakis@gmail.com

Exercice 1 : Exponentielle.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les fonctions définies sur R solutions de l'équation différentielle (E1) :$y''+2y'+y=0$.
2. On considère l'équation différentielle (E2) :$y''+2y'+y=x+3$.
   a. Vérifier que la fonction p définie sur R par $p(x)=x+1$ est solution de(E2).
   b. Démontrer qu'une fonction g est solution de (E2) si, et seulement si, la fonction g- p est solution de (E1).
   c. Déduire de1.et 2.(b) les solutions de (E2)
   d. Déterminer la solution générale de (E2) qui vérifie :$g(0)=1$ et $g'(0)=2$.

Partie B : étude d'une fonction f et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :$f(x)=x+1+xe^{-x}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère Orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$(unité graphique 2 cm).

1. a. f'et f'' désignant respectivement les dérivées première et seconde def, calculer, pour tout réel x,$f'(x)$ et $f''(x)$.
   b. étudier le sens de variation de la dérivée f'.
   c. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x)>0$.
   d. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   e. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est asymptote à (C) et préciser la position relative de (D) et (C).
   b. La courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D). Déterminer les coordonnées de A.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet sur $[0,+\infty[$ une unique solution notée α, puis vérifier que $0<\alpha<1$.
4. a. Construire la droite (D), le point A défini au2. b, la courbe (C) et la tangente en A à la courbe (C).
   b. Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Partie C : Recherche d'une approximation décimale deα

1. Démontrer que, sur [0 ;+∞[, l'équation :f(x)=2 équivaut à l'équation : $\frac{e^x}{e^x+1}=x$.

2. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle [0; 1] par :h(x)=$\frac{e^x}{e^x+1}$.
   a. Calculer h′(x) pour tout réel x de l'intervalle [0; 1] et réaliser le tableau de variations de la fonction h.
   b. En déduire que, pour tout réel x de [0; 1], h(x) appartient à [0; 1].
   c. Calculer h″(x) pour tout réel x de l'intervalle [0; 1] et étudier le sens de variations de h′.
   d. En déduire que, pour tout réel x de [0; 1], on a $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$

3. On définit la suite (u_n) n∈N par :u_0=0 et u_{n+1}=h(u_n) pour tout entier naturel n.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n,u_n appartient à l'intervalle [0; 1].
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha| \leq (\frac{1}{4})^n$

      puis que la suite(u_n) n∈N converge vers α.
   d. Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et, à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de u_p à 10^{-6} près. Que peut-on en déduire pour α ?

Exercice 2 : Exponentielle.

Partie A

⋆ Étude d'une fonction auxiliaire

La fonction d est définie sur]−1 ;+∞[par :d(x)=$e^{\frac{x}{x+1}}$.
1. Calculer la fonction dérivée d′. En déduire les variations de d.
2. Déterminer les limites deden−1 et en+∞.3.Montrer que, pour tout x>−1, on a : 0<d(x)<e.

Partie B

⋆ Étude de la fonction f

Dans cette partie on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle]−1 ;+∞[par :f(x)=$x+1-e^{\frac{x}{x+1}}$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f′et f″ les dérivées première et seconde de f.

1. Démontrer que la droite (D) d'équation y=x−e+1 est asymptote à la courbe(C).Préciser la position relative de (D) et (C).
2. a. Pour x∈]−1 ;+∞[, calculer f′(x) et f″(x).Vérifier que f″(x)= $\frac{2x+1}{(x+1)^4}e^{\frac{x}{x+1}}$.

   En déduire le sens de variations de f′.

   b. Dresser le tableau de variations de f′.(On admettra que $\lim\limits_{-1} f'(x) = \lim\limits_{+\infty} f'(x) = 1$.)
3. Démontrer que l'équation f′(x)=0 admet sur]−1 ;+∞[deux solutions dont l'une est 0.Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle. Vérifier que -0,75<α<-0,7.
4. a. Étudier les variations de f.

   b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   c. Dresser le tableau de variations de f

Partie C

⋆ Prolongement de la fonction f en −1

On considère la fonction g définie sur]−1 ;+∞[par :
g(−1)=0 et g(x)=f(x) pour tout x>−1. On appelle (C′) la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la partie B.

1. Montrer que g est continue en -1.
2. a. Montrer que l'on peut écrire $\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = 1 - \frac{1}{x}(\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}})$.

   b. Pour x∈]−1 ;+∞[, déterminer la limite lorsque x tend vers−1 de $\frac{x}{x+1}$ puis de $\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}$.

   c. En déduire que g est dérivable en - 1 et préciser son nombre dérivé g′(−1).
3. Construire (D) et (C′). Préciser les tangentes à (C′) aux points d'abscisses -1, α , 0.

Exercices 3 : fonction exponentielle.

On considère, dans cette partie, la fonction numérique f définie sur IR par : f(x)= $(x-1)(1+e^{-x})$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

1. a. Calculer f′(x) et f″(x) pour tout x réel.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f′.
   c. En déduire le signe de f′(x),x appartenant à IR.
2. a. Déterminer le sens de variation de f.
   b. Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. a. Montrer que la droite (Δ) d'équation y=x−1 est asymptote à la courbe(C) en$+\infty$.
   b. Étudier le position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ).
4. a. Déterminer l'abscisse du point de (C) où la tangente est parallèle à (Δ).
   b. Écrire une équation de cette tangente (T).
5. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les trois courbes (C), (Δ) et (T). On se limitera aux points dont l'abscisse est comprise entre 0 et 4.
6. Pour tout x réel supérieur ou égal à 1, on considère E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées (t;y) vérifiant$1\le t\le x$,$t-1\le y\le f(t)$.
   Exprimer, à l'aide d'une intégrale, l'aire de l'ensemble E (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale), en unités d'aire.

Partie B

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on note A(x) l'intégrale$\int_1^x (t-1)e^{-t}\,dt$.

1. Préciser le sens de variation sur l'intervalle [1 ;$+\infty$[de la fonction A(x) qui, à x Associe A(x).
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que A(x)=$\frac{1}{e}-xe^{-x}$.
3. Calculer limite A(x) quand $x\to+\infty$.
4. a. Montrer que l'équation d'inconnue x réelle A(x)=$\frac{1}{2e}$admet une seule solution α dans l'intervalle [1 ;$+\infty$[.
   b. Vérifier que : $2,6<\alpha<2,7$.
5. Soit h la fonction définie sur [1 ;$+\infty$[par :h(x)=1+ln(2x).
   a. Justifier que h est croissante sur [1 ;$+\infty$[.
   b. Montrer que l'équation A(x)=$\frac{1}{2e}$ équivaut à l'équation h(x)=x.
6. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :$u_0=2$, $v_0=3$ et pour tout entier Naturel n,$u_{n+1}=h(u_n)$ et $v_{n+1}=h(v_n)$·

(On admettra que pour tout entier naturel n,u_n et v_n appartiennent à l'intervalle [1 ;$+\infty$[)

a. Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n:$u_n\le v_n\le\alpha\le u_{n+1}\le v_{n+1}$.
   (On pourra utiliser la croissance de la fonction h).

b. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près, par défaut.

Exercice 4 : Fonction exponentielle .

On considère les fonctions f et g définies sur IR par :

$f(x)=\frac{1}{1+e^{x}}$ et $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$. On note C et Γ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique 4 cm).

A. Étude des fonctions f et g

1. a. Étudier les variations de f sur IR.

   b. Calculer les limites de f en +∞ et −∞. Préciser les éventuelles asymptotes à C.

   c. Prouver que le point Ω de coordonnées$(0,\frac{1}{2})$ est centre de symétrie de C.

   d .On note T la tangente à C au point Ω. Déterminer le coefficient directeur de T.

   e. Représenter T et C.

2. a. En observant que, pour tout nombre réel x, on a g(x)=f(−x) , montrer que Γest l'image de C par une symétrie que l'on déterminera.

   b. Vérifier que, pour tout nombre réel x, on a f(x)+g(x)=1. En déduire queΓest l'image de C par une autre symétrie que l'on déterminera.

   c. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T′à Γau point Ω.

   d. Représenter T′et Γsur la figure de la question 1.

B. Calcul d'une aire

On note $I=\int_0^1 f(t)dt$ et $J=\int_0^1 g(t)dt$.

1. En utilisant l'égalité de la question A. 2. b. calculer I+J.

2. a. Montrer que, pour tout nombre réel t, $\frac{1}{1+e^{-t}}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{e^{t}}{1+e^{t}}$.

   b. En déduire une primitive G de g sur IR, puis la valeur de J.

3. Calculer la valeur de I.

4. a. Prouver que, pour tout nombre réel x appartenant à [0 ;+∞[, $f(x)\leq g(x)$.

   b. On note Δ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x;y) vérifient $0\leq x\leq 1$ et $f(x)\leq y\leq g(x)$

On note A l'aire, exprimée en cm2, du domaine A. Exprimer A en fonction de I et J.
Donner une approximation décimale de A à 10^{-2} près.

C. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère les fonctions h et H définies sur [0 ;+∞[par :

$h(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})$ et $H(x)=\int_0^x h(t)dt$.

1. a. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à [0,+ ∞[h(x) est strictement positif.

   b. En déduire que H est strictement croissante sur [0,+∞[.

2. On note h′ la fonction dérivée de h.
   Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à [0 ;+∞[, h(x)=h′(x)+g(x).
   En déduire H(x) en fonction de x.

3. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à [0,+∞[, $h(x)=\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$

   En déduire la limite de h en +∞.

   b. Déterminer la limite de H en +∞. Prouver finalement que $\lim_{x\to+\infty}[H(x)-x]=1-2\ln 2$.Interpréter graphiquement ce dernier résultat.

Exercice 5 : fonction exponentielle.

Partie I

Soit a et b deux nombres réels. La fonction φ est définie sur R par :$\varphi(x)=(ax+b)e^{-x}$.

1. a. Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
   b. Vérifier que, pour tout réel x: $\varphi(x)=-\varphi''(x)-2\varphi'(x)$.
2. Démontrer que φ admet une primitiveΦ, définie sur R par :$\Phi(x)=(Ax+B)e^{-x}$ où A et B sont des nombres réels que l'on exprimera à l'aide de a et b.
3. Déterminer a et b pour que :$\varphi(0)=5$ et $\varphi'(0)=-3$.Donner alors$\varphi'(x)$,$\varphi''(x)$ et$\Phi(x)$.

Partie II

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 1 cm sur l'axe des ordonnées. Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=(2x+5)e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.Donner une interprétation graphique de cette deuxième limite.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) avec les axes du repère.
3. Calculer $f'(x)$, déterminer le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la Fonction f.
4. Soit I le point de la courbe (C) d'abscisse$-\frac{1}{2}$.Une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point I est $y=g(x)$. Déterminer $g(x)$.
5. On pose $d(x)=f(x)-g(x)$.
   a. Étudier le sens de variation de d′, calculer $d'(\frac{-1}{2})$ et donner le signe de d′.
   b. Étudier le sens de variations de d, calculer $d(\frac{-1}{2})$et donner le signe de d.
   c. Donner la position de la tangente (T) par rapport à la courbe (C).
6. Tracer la courbe (C) et la tangente (T).
7. Soit α un réel strictement positif. On note $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x=-\frac{5}{2}$ et $x=\alpha$.
   Calculer $A(\alpha)$. (On peut éventuellement utiliser le résultat de la partie I.)
   Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quandαtend vers $+\infty$.

Exercice 6 :Fonction exponentielle.

Partie A étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ .On désigne par Δ l a droite d'équation y=x+1 et par Γla courbe d'équation $y=e^x$.
   a. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ?
   b. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ et donner l'allure de Γ.
2. a. Démontrer que pour tout réel t, $e^t>t+1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. En déduire que pour tout réel t, $e^{-t}+t+1>2$, et que pour tout x de R^{*+} on a: $\frac{1}{x}+\ln x+1>2$.

Partie B étude d'une fonction.

On considère la fonction g définie sur]0 ;+∞[par g(x)=(x+1)lnx.

On appelle C la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

1. a. Étudier le sens de variations de g en utilisant la partie A.
   b. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en +∞.
2. a. Déterminer une équation de la tangente D à C au point d'abscisse 1.
   b. On appelle h la fonction définie sur]0 ;+∞[par :h(x)=g(x)−2x+2.étudier le sens de variations de h. On pourra utiliser la question A 2 b.
   En déduire le signe de h(x) suivant les valeurs de x.
   c. étudier la position de C par rapport à D.
3. Tracer C et D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
4. Pour tout n de N*, on pose $U_n=\int_n^{n+1} g(x)dx$.
   a. Donner une interprétation géometrique de U_n.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul on a :$g(n) \leq U_n \leq g(n+1)$.
   c. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).
   d. La suite (U_n) est-elle convergente?

Partie C étude d'une primitive.

G désigne la primitive de g sur]0 ;+∞[qui s'annule en 1.On a donc : pour tout x appartenant à l'intervalle]0 ;+∞[, $G(x)=\int_1^x g(t)dt$.

1. Quel est le signe de G(x) suivant les valeurs de x?
2. Calculer G(x) à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déterminer les limites de G en 0 et en +∞.

Exercice 7 : Fonctions et intégrales.

PARTIE A

Soit la fonction φ définie dans IR par$\varphi(x)=e^x+x+1$.

1. Étudier le sens de variation de φ et ses limites en +∞ et −∞.
2. Montrer que l'équation$\varphi(x)=0$ a une solution et une seule α et que l'on a: $-1,28<\alpha<-1,27$
3. En déduire le signe de$\varphi(x)$ sur IR.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{xe}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que :$f'(x)=\frac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.
2. Montrer que $f(\alpha)=\alpha+1$ et en déduire un encadrement de f(α).
3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T.
4. les limites de f en +∞ et −∞. Démontrer que la droite D d'équation y=x est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D.
5. Faire le tableau de variations de f.
6. Tracer sur un même dessin (C), T et D. La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à [−2 ; 4].

PARTIE C

On considère la fonction g, définie sur [0; 1] par :$g(x)=\ln(1+e^x)$

On note (L) la courbe représentative de g dans le repère$(O,\vec{i},\vec{j})$, I le point défini par $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, A le point d'abscisse 0 de (L) et B son point d'abscisse 1.

1. Étudier brièvement les variations de g.
2. Donner une équation de la tangente en A à (L).
3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment [IB]. Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.
4. On admet que la courbe (L) est située entre les segments [AP] et [AB]. Montrer alors que :$\ln 2+\frac{1}{4}\leq\int_0^1 g(x)dx\leq\ln(\sqrt{2(1+e)})$.
5. Au moyen d'une intégration par parties, justifier que : $\int_0^1 f(x)dx=\ln(1+e)-\int_0^1 g(x)dx$.
6. En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 8 : Exponentielle et suite.

I- Soit la fonction g définie sur R, qui à tout x associe : $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.

1. a. Montrer que la dérivée de la fonction g sur R est $g'(x) = x(e^x + 2)$.
   b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   c. Étudier le signe de g′(x) sur R, et dresser le tableau de variation de g sur R.
2. Montrer que l'équation :g(x)=0 admet une solution α et une seule sur l'intervalle [0 ;+∞[. Montrer que α est dans l'intervalle I=$[\frac{1}{2},1]$;

II- Soit la fonction f définie sur [0 ;+∞[par :f(x)=$\frac{e^x}{e^x + x}$

1. Montrer que les équations :f(x)=x et g(x)=0 sont équivalentes sur [0 ;+∞[,et que, par suite, l'équation f(x)=x admet α pour solution unique sur I.
2. a. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur [0 ;+∞[.
   b. Déterminer la limite de f en +∞.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
   d. Construire la courbe représentative C de f sur [0 ;+∞[dans un repère orthonormé (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à C aux points d'abscisses 0 et 1.

III

1. Montrer que, pour tout x appartenant à I,f(x) appartient à I.
2. Soit la suite (u_n), définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
   a. Montrer que, pour tout $n \in N^*$,$u_n \in I$.
   b. Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
   c. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que : pour tout n>1,$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1 - \alpha|$.
   d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in N*$, $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$.
   e. En déduire que (un) converge vers α.